

VISIT...

LANZAROTE
Caliente.COM

LYCE

ОЗЕМНОМ
ИСКУССТВЕ



АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР

~ КЛАССИКИ НАУКИ ~

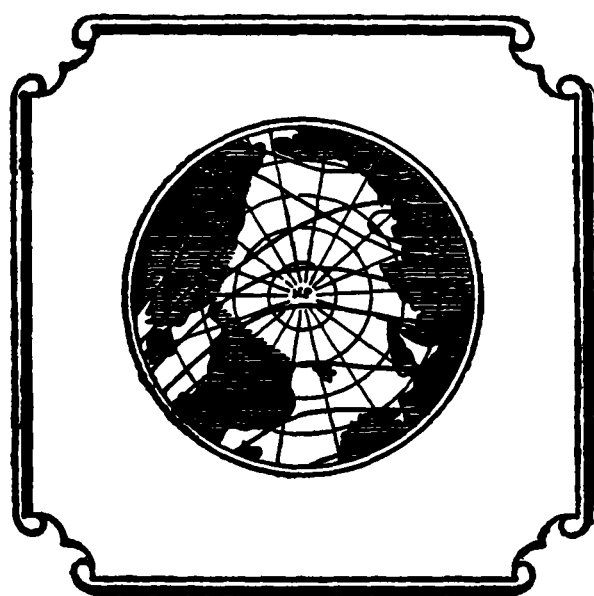


КАРЛ ФРИДРИХ ГАУСС
ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ
ПО ЗЕМНОМУ МАГНЕТИЗМУ

ПЕРЕВОД
АКАДЕМИКА А.Н. КРЫЛОВА.

РЕДАКЦИЯ
ПРОФ. Б.М. ЯНОВСКОГО
СТАТЬИ Т.Н. РОЗЕ.

КОММЕНТАРИИ
ПРОФ. Б.М. ЯНОВСКОГО и Т.Н. РОЗЕ



ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
1952

Серия „Классики науки“, основанная академиком *С. И. ВАВИЛОВЫМ*.

**Редакционная коллегия: академик *А. И. Опарин* (председатель),
академик *О. Ю. Шмидт*, член-корреспондент АН СССР *А. А. Макси-
мов*, член-корреспондент АН СССР *П. Ф. Юдин*, доктор химических
наук *Н. А. Фигуровский***





Κ. Φ. ΓΑΥΣΣ

ИНТЕНСИВНОСТЬ
ЗЕМНОЙ МАГНИТНОЙ СИЛЫ,
ПРИВЕДЕННАЯ
К АБСОЛЮТНОЙ МЕРЕ



[Отчет, напечатанный в „Геттингенских ученых ведомостях“
24 декабря 1832 г.]



Из трех элементов, определяющих проявление земного магнетизма в данном месте, — склонения, наклонения и напряженности — прежде всего стал предметом исследования первый, много позднее — второй и, наконец, лишь в последнее время — третий. Это объясняется тем, что склонение представляет непосредственный интерес для мореплавателей и геодезистов и что наклонение могло казаться гораздо ближе к склонению, нежели напряженность.

Для естествоиспытателей же интерес ко всем трем элементам совершенно одинаков: наши познания о земном магнетизме будут оставаться несовершенными и отрывочными до тех пор, пока все его отрасли не будут исследоваться с одинаковою тщательностью.

Первыми исследованиями напряженности земного магнетизма мы обязаны г-ну фон Гумбольдту, который при всех своих путешествиях обращал на этот предмет главное свое внимание и произвел большое число наблюдений, из которых выявилось постепенное уменьшение этой напряженности от магнитного экватора Земли к ее магнитным полюсам [1].

Многие наблюдатели последовали затем по стопам этого великого исследователя природы и накопили весьма ценные наблюдения почти во всех частях земной поверхности, куда в последнее время проникали ученые-путешественники. На основании этих наблюдений столь известный своими знаниями по земному магнетизму Ханстин сделал попытку составить общую карту изодинам.

Метод, применяемый при всех этих наблюдениях, состоит в том, что магнитную стрелку заставляют колебаться в тех местах, где желают сличить напряженность земного магнетизма, и точно измеряют продолжительность ее колебаний. Эта продолжительность, при прочих одинаковых условиях, зависит от величины размаха так, что чем меньше становится размах, тем быстрее приближается его продолжительность к определенному пределу, который собственно и называется продолжительностью колебания; зная величину размаха, легко можно найти и этот предел.

Напряженность земного магнетизма обратно пропорциональна квадрату продолжительности колебания одной и той же стрелки, иначе — прямо пропорциональна квадрату числа колебаний, совершаемых в течение заданного промежутка времени. Этот результат относится к полной напряженности или к горизонтальной составляющей ее, смотря по тому, колеблется ли стрелка в плоскости магнитного меридиана около горизонтальной оси или в горизонтальной плоскости около вертикальной оси.

Очевидно, допустимость этого способа зависит всецело от предположения о полной неизменяемости магнитного состояния стрелки, применявшейся при наблюдениях. При использовании для этих опытов стрелки из хорошо намагниченной стали, тщательно сохраняемой, опасность значительных изменений состояния стрелки невелика, если опыты не занимают слишком большого промежутка времени; на это можно тем более полагаться, если по возвращении на первое место окажется, что продолжительность колебаний не изменилась; однако опыт показывает, что на такой успех не легко рассчитывать, и, строго говоря, такое совпадение содержит даже логически ложный круг. В самом деле, давно известно, что как склонение, так и наклонение в том же самом месте не остаются неизменными, — и то и другое испытывает с течением времени весьма большие прогрессивные изменения, к которым прибавляются весьма заметные при точных наблю-

дениях периодические изменения, зависящие от времен года и часов дня; поэтому несомненно, что и третий элемент — напряженность — подвержена подобным же изменениям, и ее периодические дневные изменения определенно обнаруживаются при точных наблюдениях. Таким образом, если по прошествии долгого времени на том же самом месте найдена та же самая продолжительность колебаний, то нет никакой гарантии, что это не произошло от случайной компенсации изменения магнитного состояния стрелки изменением напряженности земного магнетизма в этом месте.

Если даже допустить, что эти обстоятельства лишь немного уменьшают надежность сравнительного метода, когда пользуются лишь небольшими промежутками времени, то этот метод становится совершенно неприменимым, если возникает вопрос об измерениях напряженности земного магнетизма в том же самом месте в течение весьма больших сроков, — этот вопрос, весьма важный в научном отношении, останется без ответа, если только вместо чисто сравнительного метода не будет применен другой метод, который приводит напряженность земного магнетизма к вполне определенным, неизменным мерам, которые во всякое время могут быть с наибольшей точностью проверены и находятся в полной независимости от особенностей применяемой при наблюдениях стрелки.

Нетрудно изложить теоретические основания такого независимого метода. Продолжительность колебаний данной стрелки зависит от трех величин: напряженности земного магнетизма, статического момента свободного магнетизма стрелки [°] и момента инерции ее.

Момент инерции легко находится соответствующими, существующими для этого способами; по наблюдаемой же продолжительности колебаний получится не величина напряженности земного магнетизма, а произведение этой величины на статический момент свободного магнетизма стрелки. Расчленить эти два множителя один от другого невозможно,

если не привлечь наблюдения совершенно другого рода, заключающие совершенно иное сочетание вышеуказанных величин: мы достигнем этой цели, подвергая вторую стрелку воздействию как земного магнетизма, так и первой стрелки, что позволит найти отношение этих величин. Эти два действия зависят также от магнитного состояния второй стрелки, но надлежащая постановка опытов дает возможность исключить эту зависимость: *отношение* обоих действий тем менее зависит от магнитного состояния второй стрелки, чем большее расстояние взято между двумя стрелками.

Очевидно, что при этом необходимо будет принимать в расчет положение магнитных осей обеих стрелок и положение прямой, соединяющей их центры, относительно магнитного меридиана, а также магнитное состояние первой стрелки. Все это может быть подчинено расчету только в том случае, если известен закон взаимодействия двух элементов свободного магнетизма, т. е. закон, по которому одноименные элементы отталкиваются, разноименные притягиваются. Уже Тобиас Майер высказал предположение, что закон взаимодействия элементов тот же самый, как и всемирного тяготения, т. е. что сила взаимодействия обратно пропорциональна квадрату расстояния между элементами. Кулон и Ханстин пытались подтвердить опытами это предположение; в представленной статье указанное предположение подтверждено с несомненностью. Но этот закон относится лишь к элементарным действиям; расчет полного действия одного магнитного тела на другое представляет чисто математическую задачу, если только вполне известно распределение свободного магнетизма в этих телах; поэтому взаимодействие тел зависит от особенностей самих тел, но чем больше расстояние между телами, тем меньше становится указанное случайное влияние, и при весьма больших расстояниях (как это следует из основного закона) полное взаимодействие при прочих одинаковых условиях можно считать обратно пропорциональным кубу расстояния. Произведение

этого куба на дробь, выражающую отношение действия первой стрелки на вторую к действию земного магнетизма на эту же вторую стрелку, будет поэтому при возрастающем расстоянии приближаться к определенному пределу. Соответствующее сочетание наблюдений при различных, надлежащим образом избранных, расстояниях после математической обработки даст значение этого предела, по которому найдется *отношение* тех двух величин, произведение которых выведено из наблюдаемой продолжительности колебаний первой стрелки. Соединение этих результатов, очевидно, даст отдельно каждую из этих величин.

Опыты по сравнению действия земного магнетизма и первой стрелки на вторую стрелку, подвешенную на нити, могут быть поставлены двояко, причем вторая стрелка может наблюдаться или в состоянии движения, или в состоянии покоя.

Первая возможность осуществляется наивыгоднейшим образом, если поместить первую стрелку в магнитном меридиане, проходящем через вторую, вследствие чего продолжительность колебаний второй стрелки становится или больше, или меньше, смотря по тому, одноименные или разноименные полюсы обращены друг к другу. Сравнение измененной таким образом продолжительности колебаний с получаемой под действием только одного земного магнетизма, или, лучше, сравнение увеличенной продолжительности с уменьшенной (при обратном положении первой стрелки) легко доставляет требуемое отношение.

Второй способ состоит в том, что первая стрелка помещается так, чтобы ее действие на вторую составляло некоторый угол с меридианом; угол отклонения от меридиана при положении равновесия также доставляет значение требуемого отношения. Здесь также выгодно сравнивать противоположные отклонения при обращенных положениях первой стрелки. Наивыгоднейшее положение этой стрелки есть то, когда она направлена по прямой, перпендикулярной к меридиану, проходящей через середину второй стрелки. Впрочем,

первый способ совпадает, в сущности, с методом, предложенным несколько лет тому назад Пуассоном, но известные к настоящему времени попытки некоторых физиков применить этот метод или совершенно не удались, или, в лучшем случае, привели к весьма недостаточным приближениям.

Автор много раз применял оба способа и по многим причинам нашел, что второй способ во многом предпочтительнее первого.

Главное затруднение состоит в том, что предельное значение наблюдаемых действий искажается многими другими воздействиями, зависящими от самих стрелок. Указанное действие выражается рядом, расположенным по отрицательным степеням расстояния, начиная с третьей, причем последующие члены становятся тем заметнее, чем расстояние меньше; поэтому надо на основании нескольких наблюдений эти последующие члены исключить; но при знакомстве с теорией исключения легко убедиться, что неизбежные погрешности наблюдений становятся тем опаснее для надежности результатов, чем большее число коэффициентов подлежит исключению, так что число их должно быть весьма умеренным, чтобы результаты вычислений не стали совершенно непригодными. Вследствие этого нельзя ожидать никакой точности от результатов, если не применять столь больших расстояний, что ряды сходятся весьма быстро, и достаточно в них удерживать только первые два члена. Но тогда действия стрелки становятся столь малыми, что теперешними средствами их нельзя измерить с требуемой точностью; этим объясняются неудачи опытов, произведенных до сих пор.

Сколь ни легкими теоретически представляются способы приведения напряженности земного магнетизма к абсолютным единицам, они будут неудачны в приложениях, пока магнитным наблюдениям не будет придана гораздо большая точность, нежели та, которою они до сих пор обладали. Автору представляется теперь случай осуществить многие усовершенствования приборов для магнитных наблюдений.

идея которых у него явилась много лет назад, с уверенностью, что магнитные наблюдения могут быть доведены почти, если не совсем, до той же точности, как тончайшие астрономические наблюдения. Успех оправдал эти ожидания, и два прибора, установленные в обсерватории, которые послужили для производства опытов, упомянутых в статье автора, не оставляют желать ничего более совершенного, разве только более подходящего помещения, вполне защищенного от токов воздуха и от действия расположенного поблизости железа.

Здесь не место вдаваться в полное описание этих приборов и их достоинств, но мы полагаем, что сообщением главных черт мы окажем услугу естествоиспытателям.

Автор применяет обыкновенно стрелки (если только можно назвать стрелками призматические бруски указанных ниже размеров) длиной почти в один фут и весом почти в один фунт [3]. Подвесом служит шелковая некрученая нить длиной в $2\frac{1}{2}$ фута, состоящая из 32 волокон, которая надежно может нести и двойную нагрузку; верхний конец нити можно поворачивать и углы поворота измерять по разделенному кругу. Стрелка несет на своем южном или северном конце (смотря по тому, что в данном помещении удобнее) плоское зеркало, плоскость которого двумя установочными винтами может быть с любой точностью приведена в положение, перпендикулярное магнитной оси стрелки, хотя нет необходимости строго заботиться о точности такой регулировки, ибо при самых наблюдениях погрешность регулировки сама собою измеряется весьма точно и вводится в вычисление как коллимационная погрешность.

Подвешенная таким образом стрелка помещается в деревянном цилиндрическом футляре, в котором, кроме небольшого отверстия в крышке, через которое пропускается нить, имеется еще одно отверстие в боковой стенке; по высоте и ширине оно немного больше упомянутого выше зеркала.

Против зеркала помещается теодолит; его вертикальная ось и нить подвеса находятся в одном магнитном меридиане в расстоянии около 16 парижских футов между ними. Оптическая ось трубы теодолита несколько выше оси стрелки и настолько наклонена в вертикальной плоскости магнитного меридиана, что она направляется на середину зеркала.

На штативе теодолита укреплена горизонтальная шкала длиной около 4 футов, разделенная на миллиметры и перпендикулярная к магнитному меридиану. Точку шкалы, лежащую в одной вертикальной плоскости с оптической осью трубы, мы для краткости будем называть нулевой; эта точка отмечается проходящей через середину объектива золотой нитью отвеса; шкала помещена на такой высоте, чтобы в трубу было видно отраженное изображение части шкалы; окуляр трубы устанавливается так, чтобы было ясно видно изображение шкалы. На противоположной от стрелки стороне, в расстоянии, равном расстоянию до изображения шкалы, ставится мира, служащая для проверки того, что теодолит не получил какого-либо смещения.

Отсюда легко заключить, что при точном соблюдении высказанных выше условий изображение нулевой точки шкалы придется на оптической оси трубы, и, следовательно, если с места стояния теодолита виден предмет, азимут которого известен, то с помощью описанного прибора тотчас же определяется магнитное склонение.

Если какое-нибудь из перечисленных выше условий не соблюдено, то, вообще говоря, на оптической оси окажется не нулевая точка шкалы, а какая-либо иная, и если горизонтальное расстояние от зеркала до шкалы известно, легко определить угловую цену деления шкалы и исправить полученный результат.

Величина коллимационной погрешности зеркала определяется весьма точно и просто перекладкою магнита в его подвесе так, чтобы его верхняя грань стала на место нижней.

В описанном приборе цена деления шкалы составляет 22 секунды дуги, и привычный глаз легко подразделяет этот промежуток еще на 10 частей.

Таким образом, описанным устройством направление стрелки и изменения этого направления определяются с весьма большою точностью. Нет даже надобности выжидать, чтобы стрелка пришла в состояние покоя; так как отклонения направо и налево наблюдаются весьма точно, то при надлежащей их обработке положение покоя определяется весьма точно. В утренние часы, когда дневное изменение склонения наиболее значительно, его можно прослеживать от одной минуты времени к следующей.

Не менее важны выгоды этого устройства при наблюдении колебаний. Прохождение вертикальной нити в трубе через определенное деление шкалы (на самом деле происходит обратное) можно наблюдать, даже при углах отклонения в несколько минут, со столь большою точностью, что при надлежащем внимании погрешность не превзойдет $\frac{1}{10}$ секунды времени. Значительная продолжительность одного колебания (для самого сильного магнита около 14 секунд) и весьма малое затухание размахов доставляют при этом еще весьма значительные преимущества. Достаточно пронаблюдать пару размахов, чтобы знать продолжительность одного колебания с такою точностью, что нет надобности следить за стрелкою, считать ее колебания; даже через несколько часов можно рассчитать, сколько колебаний произошло за это время. Можно начинать наблюдение колебаний со столь малых размахов (приблизительно с таких, при которых обычно наблюдения заканчивали), что приведение к бесконечно малым размахам (впрочем, весьма легко вычисляемое) становится почти незаметным, а колебания после 6 и большего числа часов остаются еще достаточно большими, чтобы наблюдать прохождения с достаточною точностью.

Иногда при наблюдениях обнаруживаются некоторые не-правильности, но столь малые, что при прежних устройствах они оставались бы незамеченными; их следует приписать токам воздуха, избежать которых в теперешнем помещении полностью не удавалось. Этих токов совершенно не было бы, если бы отверстие перед зеркалом было бы прикрыто плоскопараллельным стеклом, весьма совершенным по качеству, но автор до сих пор такового не имел; во всяком случае при этом происходила бы неприятная потеря света.

К перечисленным выгодам устройств надо еще прибавить то, что наблюдатель находится все время в очень большом расстоянии от стрелки, тогда как при прежних устройствах он должен был находиться весьма близко, так что при помещении стрелки даже в стеклянном ящике теплота самого наблюдателя, теплота осветительной лампы или железа, или даже латуни, которую случайно мог иметь при себе наблюдатель, могли оказывать возмущающее влияние на стрелку. Преимущества, доставляемые сильными тяжелыми магнитами, которыми исключительно пользовался автор, настолько очевидны, что непонятно, почему для большей части магнитных наблюдений, в особенности для колебаний, до сих пор применяются весьма малые стрелки^[4]. Было бы выгодно еще увеличить размеры примененных автором магнитов, как показали испытания магнита, вес которого был более двух фунтов. Автор убежден, что при пользовании четырех- или шестифунтовыми магнитами, на которые движения воздуха заметного влияния не оказывают, магнитные наблюдения достигли бы такой точности, которая не уступала бы точности самых тщательных астрономических наблюдений. Правда, пришлось бы применять более прочные нити подвеса, кручение которых дало бы более значительную реакцию, но это совершенно не является препятствием к их применению, так как при точных наблюдениях кручением никогда нельзя пренебрегать и необходимо вводить его в вычисления, что не представляет никакой трудности.

Описанные приборы, кроме главного своего назначения, служат еще для другой цели, о которой, хотя она и не находится в непосредственной связи с главной, мы здесь в нескольких словах упомянем.

Эти приборы являются наиболее чувствительными и наиболее удобными гальванометрами как для самых сильных, так и для самых слабых гальванических токов, и не представляет никаких затруднений привести и эти измерения к *абсолютным* мерам. Для измерения наиболее сильных токов стоит только провести проволоку, проводящую ток, в плоскости магнитного меридиана на значительном расстоянии выше или ниже стрелки (по крайней мере, на расстоянии в несколько футов); для весьма слабых токов присоединяют мультипликатор, намотанный на ящик, в котором находится стрелка. Автор произвел несколько опытов с мультипликатором, содержащим 68 оборотов проволоки длиной в 300 футов. Здесь нет надобности в больших пластинах: две небольшие кнопки, даже оголенные концы проволок из двух различных металлов, погруженные в подкисленную воду, дают ток, который вызывает отклонение в несколько сот делений шкалы; когда применяли пару пластинок весьма умеренных размеров, то при замыкании цепи изображение шкалы пролетало с быстротою стрелы через все поле зрения трубы.

Легко видеть, каким образом, пользуясь этими средствами, можно производить измерения гальванических токов с такими удобствами и точностью, которые оставляют далеко позади применявшиеся до сих пор громоздкие способы наблюдения продолжительности колебаний: таким образом можно с полной точностью наблюдать постепенное и, как известно, вначале весьма быстрое убывание силы тока от секунды к секунде. Если вместо простой стрелки взять двойную (астатиическую), то нет столь малой электромагнитной силы, которую нельзя бы измерить с весьма большою точностью. Таким образом, здесь открывается естествоиспытателю обширная область самых интересных исследований.

Что же касается главного содержания самой статьи — именно математического развития теории, различных своеобразных, примененных автором, приемов определений разных величин, например момента инерции колеблющегося магнита, независимо от предположения о правильности его формы; опытов, произведенных для определения основного закона магнитных взаимодействий; наконец, определения напряженности земного магнетизма в данном месте, — то относительно всего этого мы отсылаем к самой статье.

Здесь же мы приведем вкратце окончательные результаты.

Еще до применения описанных приборов автор произвел множество опытов со стрелками самых разнообразных размеров, нисходя до веса в пол-лота [5]. Полученные результаты в общем достаточно близко согласуются с позднейшими, но так как они основаны на гораздо более несовершенных средствах и так как вообще с малыми стрелками невозможно получить большую точность, то они не заслуживают упоминания. Наоборот, результаты определения интенсивности горизонтальной составляющей земного магнетизма, полученные при помощи описанных приборов, помещаются здесь:

I. Май 21 1.7820	VI. Июль 25—26 . . . 1.7845
II. Май 24 1.7694	VII. Сентябрь 9 . . . 1.7764
III. Июнь 4 1.7713	VIII. Сентябрь 18 . . . 1.7821
IV. Июнь 24—28 . . . 1.7625	IX. Сентябрь 27 . . . 1.7965
V. Июль 23—24 . . . 1.7826	X. Октябрь 15 . . . 1.7860

Здесь за единицы приняты миллиметр, миллиграмм и секунда, однако *каким образом* выражается мера указанной напряженности через эти единицы, здесь изложено быть не может; впрочем, вышеприведенные числа остаются теми же самыми, если единицы длины и единицы веса (собственно, единицы массы) будут изменены в одинаковом отношении.

Произведенные опыты различались между собою отчасти соблюдением большей или меньшей точности при их произ-

водстве, отчасти применением разных стрелок или магнитов, частью местом их производства.

Опыты VII, VIII, IX во всех отношениях произведены настолько тщательно, насколько это допускал для их производства прибор в его теперешнем виде, а именно — требуемые расстояния измерялись с микроскопической точностью.

При опытах IV, V, VI и X некоторые измерения производились с несколько меньшей тщательностью; в этом отношении опыты I, II, III отстают еще более.

Для первых восьми опытов мы применяли различные магниты, но не сильно разнящиеся по размерам и весу (вес от 400 до 440 г). При опыте X главный магнит весил 1062 г. Опыт же IX, наоборот, был произведен с весьма малым магнитом (весом 55 г) для того только, чтобы посмотреть, какая точность достижима с весьма малой стрелкой при соблюдении всех прочих мер предосторожности. Надежность результатов этого опыта значительно ниже прочих.

Опыты VII—X произведены на одном и том же месте в обсерватории, более ранние в других местах — частью в обсерватории, частью в жилых комнатах автора. Из всех этих опытов нельзя, собственно говоря, вывести чистый результат, так как в зданиях, особенно в самой обсерватории, находится много железа, которое, намагнитившись от земного магнетизма, влияет на стрелку, и это влияние прибавляется к силе земного магнетизма. Однако места выбирались так, чтобы *вблизи* приборов не было ни неподвижных, ни подвижных масс железа; но наверное влияние даже отдаленных масс нельзя считать вполне устраненным. Тем не менее по простому рассмотрению различных результатов можно предполагать, что происходящее от внешних влияний изменение земного магнетизма ни в одном из этих мест не превосходит одной сотой доли полной его величины. Истинное значение, соответствующее точности метода измерений, может быть получено лишь в особом помещении, совершенно не содержащем железа.

Чтобы найти *полную* величину силы земного магнетизма, надо умножить полученные числа на секанс угла наклона. Автор намерен в будущем исследовать и этот элемент при помощи соответствующих методов; пока что 23 июня он нашел значение этого элемента с помощью инclinатора физического кабинета равным $68^{\circ}22'52''$. Этот результат не свободен от искажающих влияний, так как наблюдения производились в обсерватории, и поэтому легко может быть изменен на несколько минут.

**ИНТЕНСИВНОСТЬ
ЗЕМНОЙ МАГНИТНОЙ СИЛЫ,
ПРИВЕДЕННАЯ
К АБСОЛЮТНОЙ МЕРЕ**





Для полного определения земной магнитной силы в данном месте требуются три элемента: *склонение*, т. е. угол между плоскостью действия силы и плоскостью меридиана, *наклонение* направления силы к горизонтальной плоскости, наконец, в-третьих, *интенсивность* силы [6].

Склонение, вследствие его приложений к нуждам мореплавания и геодезии, рассматривается как важнейший элемент, и с самого начала оно привлекло внимание астрономов и физиков, которые затем в продолжение целого столетия посвятили свои заботы также наклонению. Напротив, третий элемент — интенсивность земной магнитной силы, которую также необходимо считать предметом, достойным научного исследования, — до последнего времени оставался в совершенном пренебрежении.

Знаменитому Гумбольдту, помимо многих других его заслуг, принадлежит и та, что он первый обратил внимание на этот предмет и в продолжение своих многочисленных путешествий произвел большое число наблюдений относительной величины напряженности земного магнетизма; из них он вывел непрерывное увеличение этой напряженности при продвижении от магнитного экватора к полюсу [7]. Многие физики последовали по стопам этого исследователя природы и собрали такой запас определений напряженности, что столь известный своими знаниями по земному магнетизму ученый Ханстин смог издать мировую карту изодинам.

Метод, которым для этих наблюдений пользуются, состоит в определении времени, в течение которого одна и та же магнитная стрелка в различных местностях совершает одно и то же число колебаний, или же в определении числа колебаний в продолжение того же самого промежутка времени; напряженность принимается пропорциональной квадрату числа колебаний, совершаемых в заданное время; таким образом сравниваются между собою полные напряженности, когда стрелка наклона, подвешенная за центр тяжести, колеблется около горизонтальной оси, перпендикулярной к меридиану, или горизонтальная напряженность, когда горизонтальная стрелка колеблется около вертикальной оси. Эти последние наблюдения обладают большою точностью, и результаты их, по известному наклонению, легко приводят к полной напряженности.

Ясно, что сущность этого способа зависит от предположения, что распределение свободного магнетизма в частицах стрелки, применяемой для таких сравнений, остается неизменным при отдельных наблюдениях, так как если бы магнитная сила стрелки с течением времени подверглась бы малому уменьшению^[8], так что она стала бы колебаться медленнее, то наблюдатель, не зная о таком изменении, приписал бы меньшее значение напряженности земного магнетизма в месте наблюдения. Но если наблюдения производятся через малые промежутки времени, стрелка же изготовлена из хорошо закаленной стали и тщательно намагничена, то о значительном уменьшении ее силы можно не беспокоиться; кроме того, неуверенность уменьшается, если для сравнения применяется несколько стрелок. Наконец, уверенность в этом предположении увеличивается, если по окончании путешествия окажется, что в исходном месте время колебания не изменилось. Но какие бы предосторожности ни принимались, едва ли можно избежать медленного уменьшения силы стрелки, и поэтому в редких случаях можно ожидать такого совпадения. Вследствие этого при сравнении напряженностей в местах, значи-

тельно удаленных друг от друга, не удастся достигнуть той точности, которая желательна.

Впрочем, недостаток этого метода становится менее важным, когда дело идет о сравнении напряженностей, наблюдаемых одновременно или через небольшие промежутки времени. Кроме того, опыт показывает, что как склонение, так и наклонение в данном месте претерпевают непрерывные изменения, которые становятся весьма большими через многие годы; поэтому не остается сомнения в том, что и напряженность подвержена таким же вековым изменениям; таким образом, ясно, что поскольку дело касается *этого* вопроса, то этот метод становится совершенно недействительным. Однако для развития естественных наук чрезвычайно желательно, чтобы этот важнейший вопрос был приведен в полнейшую ясность, что не может быть сделано, пока чисто сравнительный метод не будет заменен другим, который был бы независим от случайных неправильностей магнитной стрелки и приводил бы напряженность земного магнетизма к неизменным единицам и к абсолютным мерам.

Нетрудно установить теоретические начала, на которых должен быть основан столь давно желаемый метод. Число колебаний, совершаемых магнитною стрелкою в продолжение заданного промежутка времени, зависит как от напряженности земного магнетизма, так и от свойств стрелки, а именно — от статического момента элементов свободного магнетизма, содержащегося в ней, и от ее момента инерции. Так как момент инерции может быть определен без затруднений, то ясно, что наблюдение колебаний даст нам произведение напряженности земного магнетизма на статический момент магнетизма стрелки; но эти две величины не могут быть отделены, если не привлечь наблюдений другого рода, которые приводили бы к иным соотношениям между этими же величинами. Для этой цели служит вторая стрелка, которую подвергают действию земного магнетизма и магнетизма первой стрелки так, чтобы можно было исследовать, в каком

отношении находятся эти два действия. Оба эти действия зависят от распределения свободного магнетизма второй стрелки, но второе, кроме того, зависит от свойств первой стрелки, расстояния между центрами, положения прямой, соединяющей центры по отношению к магнитным осям обеих стрелок, наконец от закона, которому следуют магнитные притяжения и отталкивания.

Тобиас Майер первый высказал предположение, что этот закон совпадает с законом тяготения в том, что оба эти действия убывают пропорционально квадратам расстояний; опыты знаменитых Кулона и Ханстина показали допустимость этого предположения, новейшие же опыты устранили всякие сомнения относительно его. Но необходимо заметить, что этот закон относится к отдельным элементам свободного магнетизма, полное же действие намагниченного тела совершенно иное, и для весьма больших расстояний приближается, как то следует из самого указанного закона, к обратной пропорциональности кубу расстояний, так что действие стрелки, умноженное на куб расстояния при непрерывном увеличении расстояний и сохранении прочих условий, приближается асимптотически к предельному значению. Если некоторая длина будет принята за единицу и расстояния будут выражены в этих единицах, то это предельное значение будет однородно с действием земной магнитной силы и может быть сравниваемо с ним^[9].

Соответствующим расположением опытов и их обработкой может быть найдено предельное значение, и так как оно содержит только момент первой стрелки, то получится частное от деления этого момента на напряженность земной силы; сличение этого частного с ранее найденным произведением этих количеств даст возможность исключить этот статический момент, — следовательно, даст значение напряженности земного магнетизма.

Что же касается способа испытания действия земного магнетизма и первой стрелки на вторую, то здесь представ-

ляются два пути, так как вторая стрелка может быть наблюдаема в состоянии движения или в состоянии равновесия. Первый способ состоит в том, чтобы наблюдать колебания этой стрелки, когда действие земного магнетизма слагается с действием первой стрелки, которую надо расположить в надлежащем расстоянии так, чтобы ее магнитная ось лежала в магнитном меридиане, проведенном через центр колеблющейся стрелки; при таком условии колебания или ускоряются или замедляются, смотря по тому, одинаковые или разные полюсы обращены друг к другу; сравнение же времен колебания для обоих положений первой стрелки или обоих времен колебаний с временем колебания под действием одного только земного магнетизма (когда первая стрелка удалена) покажет отношение этой силы к действию первой стрелки.

Другой способ состоит в том, что первая стрелка располагается так, чтобы направление ее силы в области расположения второй свободно подвешенной стрелки составляло некоторый угол (например прямой) с магнитным меридианом; при таком условии вторая стрелка отклонится от магнитного меридиана, и по величине отклонения можно получить отношение между силою земного магнетизма и действием первой стрелки.

Впрочем, первый способ в сущности совпадает с тем, который был предложен знаменитым Пуассоном уже несколько лет тому назад. Но испытания, произведенные по этому способу некоторыми физиками, насколько мне известно, являются или совершенно неудачными, или, в лучшем случае, могут рассматриваться как грубое приближение.

Трудность заключается главным образом в том, что по действию стрелки, наблюдаемому для небольших расстояний, необходимо вычислить предельное значение действия, относящееся к расстояниям достаточно большим, причем исключения неизвестных, необходимые для этой цели, тем сильнее осложняются малейшими погрешностями наблюдений, иногда даже становятся совсем невозможными, чем большее число

неизвестных, зависящих от особенностей стрелки, приходится исключать. Вычисление может быть сведено к малому числу неизвестных только тогда, когда взаимодействие стрелок происходит на таких расстояниях, которые достаточно велики по сравнению с длиной стрелок и, значит, сами действия весьма малы. Для точного же измерения столь малых взаимодействий применяемые до сих пор средства недостаточны.

Таким образом, я пришел к заключению, что я должен направить свои усилия на нахождение нового средства, при помощи которого как время колебаний, так и направления стрелок могли бы наблюдаться и измеряться с гораздо большей точностью, нежели это делалось до сих пор. Предпринятые для этого работы, продолжавшиеся несколько месяцев, в которых мне часто помогал Вебер, не только привели к ожидаемым результатам, но далеко превысили их, так что теперь, чтобы довести точность этих опытов до точности астрономических наблюдений, требуется лишь помещение, свободное от близости железа и от потоков воздуха. В наличии имеются два прибора, одинаково замечательные как по простоте устройства, так и по доставляемой ими точности. Описание их я оставляю до другого случая, теперь же я перейду к изложению опытов по определению напряженности земного магнетизма, произведенных физиками в нашей обсерватории.

§ 1

Для объяснения магнитных явлений допускают существование двух магнитных жидкостей, из которых одну физики именуют северной, другую южной. Предполагается также, что элементы одной жидкости притягивают элементы другой и что, напротив, два элемента одной и той же жидкости отталкивают друг друга, причем и то и другое действие обратно пропорциональны квадрату расстояния. Справедливость этого закона будет вполне подтверждена самими наблюдениями.

Эти жидкости не существуют самостоятельно; они связаны с весомыми частицами тел, способных намагничиваться; действие же их проявляется в том, что они или приводят эти тела в движение, или препятствуют и изменяют движения, производимые другими силами, действующими на тело, например силою тяжести.

Таким образом, действие данного количества магнитной жидкости на данное же количество той же самой или другой жидкости при данном расстоянии будет сравнимо с данной движущей силой, т. е. с действием данной ускоряющей силы на данную массу, и поскольку магнитные силы могут быть постигаемы не иначе, как по действиям, ими производимым, то эти действия и должны служить мерою магнитных сил. Чтобы привести эти меры к известным понятиям, необходимо прежде всего установить единицы для трех родов величин, а именно — единицу длины, единицу весовой массы, единицу ускоряющей силы. За эту третью может быть принята сила тяжести в месте наблюдения; если же это не нравится, то надо прибавить единицу времени, так что ускоряющая сила будет равна единице, если она в единицу времени сообщает телу в направлении его движения изменение скорости, равное единице.

При этих условиях единицей количества северной жидкости будет такое количество, отталкивающее действие которого на количество, ему равное, находящееся в удалении, равном единице, равно единице движущей силы, т. е. действию ускоряющей силы, равной единице, на массу, равную единице; то же самое относится и к единице количества южной жидкости. При таком определении надо считать, что как действующее количество, так и подвергающееся действию присоединены к физическим точкам. Кроме того, необходимо принять, что притяжение заданных количеств разноименных жидкостей при заданном расстоянии равно отталкиванию равных количеств одноименных жидкостей. Поэтому действие количества m северной магнитной жидкости на количе-

ство m' таковой же в расстоянии r (причем предполагается, что каждое из этих количеств соединено в одну точку) выражается через $\frac{mm'}{r^2}$, т. е. оно равняется движущей силе $\frac{mm'}{r^2}$, действующей в направлении от первой точки ко второй; очевидно, что эта формула является общей, если принять, чего мы и будем теперь всегда придерживаться, что количество южной жидкости принимается за отрицательное, и что отрицательное значение силы $\frac{mm'}{r^2}$ означает притяжение.

Если в одной и той же физической точке одновременно находятся равные количества северной и южной жидкости, то от них не произойдет никакого действия; если же эти количества различные, то надо рассматривать лишь избыток одной из них, который мы будем называть свободным магнетизмом (положительным или отрицательным).

§ 2

К этим основным представлениям необходимо добавить еще одно, всегда подтверждаемое опытом: всякое тело, заключающее магнитные жидкости, содержит равные количества той и другой.

Опыт показывает, что это допущение распространяется также и на столь малейшие частицы таких тел, какие еще могут различаться нашими чувствами. На основании сказанного в конце предыдущего параграфа, что действие может возникнуть только тогда, когда жидкости между собой разделены, мы должны по необходимости принять, что жидкости разделены столь малыми промежутками, что они недоступны нашим измерениям. Поэтому тело, способное намагничиваться, надо рассматривать как совокупность бесчисленного множества частиц, каждая из которых содержит некоторое количество северного магнетизма и таковое же южного и притом так, что они или равномерно смешаны между собою (магнетизм скрыт), или претерпели большее или меньшее

разъединение (магнетизм становится явным); однако при этом разъединении не происходит переливания жидкости от одной частицы к другой. Безразлично, считать ли, что большее разъединение происходит от большего количества магнетизма, ставшего свободным, или считать, что оно вызвано образованием большего промежутка между разноименными жидкостями. Очевидно, что кроме величины этих разъединяющих промежутков необходимо рассматривать и их направление, так как смотря по тому, совпадает ли оно для различных частиц или нет, будет возникать большее или меньшее воздействие всего тела на точки, расположенные вне тела.

Каково бы ни было распределение свободного магнетизма внутри тела, оно всегда, на основании одной общей теоремы, может быть заменено другим распределением, соответствующим определенному закону, по поверхности тела, которое вне тела будет производить совершенно те же силы, как и раньше, так что расположенный где-либо вне тела элемент магнитной жидкости будет испытывать в точности то же самое притяжение или отталкивание как от действительного распределения магнетизма внутри тела, так и от воображаемого распределения его на поверхности тела. То же условное распределение может быть применено и к двум телам, действующим друг на друга соответственно имеющемуся в них свободному магнетизму, так что для каждого из них воображаемое распределение по поверхности может заменить истинное внутри тела. Таким образом, наконец, можно выяснить истинный смысл общепринятого выражения, когда одному из концов магнитной стрелки приписывается только северный магнетизм, другому только южный; очевидно, что указанное выражение не согласуется с высказанным основным положением, безусловно необходимым для объяснения других явлений.

Но здесь достаточно об этом упомянуть мимоходом; теорема, которая для настоящего вопроса не нужна, будет рассмотрена более обстоятельно в другом случае.

§ 3

Магнитное состояние тела определяется распределением свободного магнетизма в отдельных его частицах. Мы замечаем существенное различие этого состояния у разных тел, способных к намагничиванию. В одних, например в мягком железе, это состояние немедленно изменяется от действия малейшей силы и по прекращении этого действия вновь наступает прежнее состояние; наоборот, в других телах, особенно в закаленной стали, сила должна достигнуть сперва некоторой определенной величины, чтобы заметно изменить магнитное состояние тела; после же прекращения действия силы тело или остается в приобретенном состоянии, или же не возвращается полностью в свое прежнее состояние.

В телах первого рода магнитные частицы располагаются, следовательно, так, что магнитные силы, происходящие частью от самого тела, частью от внешних причин, находятся в полном равновесии, или, по меньшей мере, магнитное состояние заметно не отличается от указанного равновесия.

Для тел второго рода магнитное состояние может длительно сохраняться без того, чтобы имело место равновесие между силами, если только не действуют более сильные внешние силы. Хотя причина этого явления неизвестна, но можно ее вообразить в том, что весомые частицы тел второго рода оказывают сопротивление движению соединенных с ними магнитных жидкостей, подобное трению, которое в мягком железе совершенно отсутствует или же весьма мало.

При теоретических исследованиях эти два случая требуют совершенно различной трактовки; но в этой статье речь будет идти только о телах второго рода; при опытах, о которых мы будем сообщать, неизменность магнитного состояния отдельных тел является основным предположением, и надо принимать тщательные предосторожности, чтобы при опытах не было близко таких тел, которые могут изменить это магнитное состояние.

Однако есть такая причина, которая вызывает также изменение состояния и тел второго рода, — именно теплота. Наблюдения с несомненностью показывают, что магнитное состояние тела изменяется вместе с его температурой, однако так, что если нагревание не слишком велико, то при возвращении к первоначальной температуре возвращается и прежнее магнитное состояние.

Эта зависимость должна быть определена соответствующими опытами, и если наблюдения, относящиеся к какому-либо испытанию, производились при разных температурах, они должны быть сперва приведены к одной температуре.

§ 4

Независимо от магнитных сил, действия которых мы замечаем между отдельными, достаточно близкими между собой телами, на магнитные жидкости действует еще другая сила, и так как она обнаруживается повсюду на земле, ее приписывают самому земному шару и называют земным магнетизмом.

Эта сила проявляется двояко: тела второго рода, в которых развит магнетизм, имея опору в центре тяжести, стремятся занять определенное направление; в телах первого рода магнитные жидкости этою силою сами собою разъединяются; это разъединение можно сделать весьма заметным, взяв тела соответственной формы и поставив их в соответствующее положение. Оба эти явления объясняются представлением, что указанная сила в любом месте гонит северную жидкость по определенному направлению, южную же с тем же усилием — по обратному. Когда говорят о направлении силы земного магнетизма, то всегда подразумевают направление первой силы; это направление определяется ее наклоном к горизонтальной плоскости и отклонением от меридиана той вертикальной плоскости, в которой действует земная сила; последняя плоскость называется плоскостью магнитного меридиана.

Напряженность же земного магнетизма должна измеряться тою движущею силою, с которой он действует на единицу свободного магнетизма. Эта сила не только различна в разных местах Земли, но и изменяется в одном и том же месте как в течение веков и лет, так и в течение времен года и часов дня. По отношению к ее направлению эта изменчивость известна уже издавна; что же касается напряженности, то до сих пор она могла быть наблюдаема только в течение суток, ибо не существовало приборов для наблюдений в течение больших промежутков времени. Этот недостаток будет устранен в будущем приведением напряженности к абсолютной мере.

§ 5

Чтобы вычислить действие земного магнетизма в телах второго рода (которые только и рассматриваются в дальнейшем), вообразим, что такое тело разделено на бесконечно малые части, и пусть dm есть элементарное количество свободного магнетизма, заключенное в частице, прямолинейные прямоугольные координаты которой обозначим через x, y, z ; элементы южного магнетизма принимаем за отрицательные. Прежде всего ясно, что распространенный на все тело (и даже на всякую измеримую часть тела) интеграл $\int dm = 0$. Затем полагаем

$$\int x dm = X; \quad \int y dm = Y; \quad \int z dm = Z.$$

Эти величины можно назвать моментами свободного магнетизма относительно координатных плоскостей или относительно перпендикулярных к ним осей. Предполагая, что a есть любая постоянная, имеем

$$\int (x - a) dm = X;$$

мы ясно видим, что момент относительно данной оси зависит лишь от ее направления, а не от ее начала.

Если через начало координат провести четвертую ось, составляющую с предыдущими углы A, B, C , то момент элемента dm относительно этой оси будет

$$(x \cos A + y \cos B + z \cos C) dm,$$

и момент свободного магнетизма ^[10] во всем теле будет

$$X \cos A + Y \cos B + Z \cos C = V.$$

Положим $\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = M$ и

$$X = M \cos \alpha; \quad Y = M \cos \beta; \quad Z = M \cos \gamma$$

и проведем пятую ось, составляющую с тремя первыми углы α, β, γ и с четвертой угол ω ; так как ввиду сделанных обозначений

$$\cos \omega = \cos A \cos \alpha + \cos B \cos \beta + \cos C \cos \gamma,$$

то

$$V = M \cos \omega.$$

Эту пятую ось назовем просто *магнитной осью* тела и припишем ей направление, соответствующее положительному значению корня $\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$. Если четвертая ось совпадет с магнитной осью, то

$$V = M.$$

Очевидно, что это есть наибольший из всех магнитных моментов; момент относительно всякой другой оси получим, умножив этот наибольший момент (который, ввиду того, что можно не опасаться двусмысленности, может быть назван магнитным моментом тела) на косинус угла между этой осью и магнитной.

Момент относительно оси, перпендикулярной к магнитной, равен нулю и является отрицательным относительно всякой оси, составляющей с магнитной осью тупой угол.

На основании изложенного магнитная ось не есть определенная прямая, так как ее можно провести через любую.

точку, — ей принадлежит лишь определенное направление; иными словами, существует неограниченное число между собою параллельных магнитных осей. Если из них выбрать какую-нибудь по произволу и приписать ей определенную длину, то концы ее будут называться полюсами: один — южным, именно тот, из которого ось исходит, другой — северным, к которому ось направлена.

§ 6

Если на отдельные частицы магнитных жидкостей действует сила постоянной напряженности и постоянного направления, то полная сила, действующая на тело, легко выводится по правилам статики, ибо в этом случае магнитные частицы как бы утрачивают свойства жидкости и образуют с весомым телом одну твердую массу. Пусть на любую магнитную частицу dm действует движущая сила Pdm по направлению D (причем для частиц южной жидкости отрицательный знак сам собою вводит обратное направление). Пусть A и B — две точки тела, лежащие на магнитной оси, и расстояние между ними равно r ; оно принимается положительным, если магнитная ось направлена от A к B ; тогда легко видеть, что если приложить к точкам A и B две новые силы, равные $\frac{PM}{r}$, из которых одна действует на точку A в направлении D , другая — на B в направлении обратном, то эти силы будут находиться в равновесии. Вследствие этого первые силы будут равнозначущи двум силам $\frac{PM}{r}$, из которых одна действует на точку B в направлении D , другая — на точку A в направлении противоположном; очевидно, что такие две силы не могут быть соединены в одну^[11].

Если кроме силы P , направленной по D на магнитные жидкости тела, действует подобная же сила P' , направленная по D' , то вместо нее опять могут быть приложены две другие силы, действующие на те же точки A и B , или, вообще,

на другие точки A' и B' , причем $A'B'$ есть также магнитная ось; эти силы должны равняться $\frac{P'M}{r'}$, где r' есть расстояние $A'B'$, и действовать на B' в направлении D' и на A' — в направлении обратном. То же самое относится ко многим силам.

Земной магнитной силе можно с уверенностью приписать для столь малого объема, как испытуемое тело, напряженность и направление повсюду постоянные, хотя и изменяющиеся с течением времени, поэтому выше сказанное будет здесь приложимо. Но может быть выгоднее с самого начала разложить земную силу на две составляющие: горизонтальную, равную T , и вертикальную, равную T' , которая в наших местностях направлена вниз. В том случае, когда требуется эту последнюю силу заменить двумя другими, приложенными в точках A' и B' , то, так как выбор самих этих точек и расстояния $A'B' = r'$ произвольный, возьмем за точку A' центр тяжести тела, причем вес тела, т. е. силу тяжести, движущую его массу, обозначим через p и положим $\frac{T'M}{p} = r'$.

Таким образом, действие силы T' разлагается на силу p , приложенную в точке A' , направленную вверх, и равную ей силу, приложенную в точке B' , направленную вниз, и так как очевидно, что первая уничтожается силою тяжести, действие вертикальной слагающей сводится к простому перемещению центра тяжести из A' в B' . Кроме того, очевидно, что в тех местностях, где земная магнитная сила составляет острый угол с отвесною линией, иными словами, где ее вертикальная составляющая гонит северную магнитную жидкость вверх, перемещение центра тяжести вдоль магнитной оси, подобное описанному, происходит к южному полюсу стрелки^[12].

При таком рассмотрении само собою ясно, что какие бы опыты ни производились с магнитною стрелкою при одном магнитном ее состоянии, из них нельзя определить наклонения; необходимо, чтобы положение истинного центра тяжести было бы уже заранее известно. Обыкновенно это положение определяется ранее намагничивания стрелки, но такой

способ недостаточно надежен, ибо стальная стрелка при самом ее изготовлении принимает некоторое, хотя и слабое, магнитное состояние. Поэтому для определения наклона необходимо, чтобы соответственным изменением магнитного состояния стрелки было вызвано другое расположение центра тяжести. Чтобы оно возможно больше отличалось от первого, необходимо перемангнитить стрелку, т. е. обменять полюсы местами, отчего происходит двойное перемещение центра тяжести. Впрочем, перемещение центра тяжести даже для стрелок наивыгоднейшей формы при намагничении до насыщения не превосходит некоторого предела, составляющего в наших местностях (для простого перемещения) около 0.4 мм, и в тех местностях, где вертикальная сила наибольшая, меньше 0.6 мм. Отсюда видно, какая тщательная механическая обработка требуется для стрелок, предназначенных для определения наклона.

§ 7

Если какая-либо точка C магнитного тела неподвижно закреплена, то необходимое и достаточное условие равновесия состоит в том, чтобы плоскость, проведенная через точку C , через центр тяжести и через магнитную ось, совпадала с магнитным меридианом и чтобы те моменты, с которыми земная магнитная сила и сила тяжести стремятся вращать эту плоскость вокруг точки C , взаимно уравнивались. Второе условие сводится к тому, чтобы при наклоне i магнитной оси к горизонтальной плоскости и при горизонтальной слагающей T земной магнитной силы $TM \sin i$ равнялось произведению веса тела на расстояние смещенного положения B' центра тяжести до отвесной линии, проведенной через точку C ; очевидно, что это расстояние должно лежать в южной или северной части, смотря по тому, представляет ли угол i возвышение или снижение; при $i=0$ точка B лежит сама на упомянутой отвесной линии.

Если тело уже настолько повернуто около этой отвесной линии, что магнитная ось пришла в такую вертикальную плоскость, магнитный азимут которой, т. е. угол с северною частью магнитного меридиана, считаемый по желанию положительным к востоку или к западу, равен u , то земной магнетизм будет действовать на тело, вращающееся около вертикальной оси, с силою, стремящеюся уменьшить угол u , причем момент этой силы будет равен $TM \cos i \sin u$, и тело будет совершать около этой оси колебания, продолжительность которых может быть вычислена известным способом. Именно, если обозначить через K момент инерции относительно оси колебания (т. е. сумму произведений масс весомых частиц на квадрат их расстояний до оси) и, как обычно, через π длину полуокружности при радиусе, равном единице, то продолжительность одного бесконечно малого колебания будет

$$\pi \sqrt{\frac{K}{TM \cos i}},$$

если для T и M принять за единицу ускоряющей силы такую, которая в единицу времени сообщает скорость, равную единице; приведение конечных размахов к бесконечно малым производится так же, как для маятника [13].

Таким образом, если по наблюдениям будет найдено, что продолжительность одного колебания равна t , то у нас будет уравнение

$$TM = \frac{\pi^2 K}{t^2 \cos i},$$

и если, кроме того, тело подвешено так, что магнитная ось горизонтальна, то

$$TM = \frac{\pi^2 K}{t^2}.$$

Если желательно принять за единицу ускоряющей силы силу тяжести, то предыдущее выражение надо разделить на

$\pi^2 l$, где l означает длину секундного маятника, так что будет вообще

$$TM = \frac{K}{t^2 l \cos i},$$

или в нашем случае

$$TM = \frac{K}{t^2 l}.$$

§ 8

Когда опыты подобного рода производятся над магнитными стрелками, подвешенными на вертикальной нити, то при точных опытах нельзя пренебрегать реакцией, оказываемой кручением нити.

Мы будем различать у такой нити два горизонтальных диаметра: один — D — при нижнем конце, к которому прикреплена стрелка, параллельный магнитной ее оси, другой — E — в верхнем конце, которым закреплена нить, и пусть E параллелен D при незакрученном состоянии нити. Положим, что диаметр E составляет с магнитным меридианом угол v , диаметр же D — угол u , тогда, согласно опыту, сила кручения приблизительно пропорциональна углу $v - u$; поэтому мы примем, что момент силы кручения, стремящейся сделать угол u равным v , выражается формулой $(v - u)\theta$ [14].

Так как момент земной магнитной силы, стремящейся уменьшить угол u , равен $TM \sin u$, то условие равновесия выражается уравнением

$$(v - u)\theta = TM \sin u,$$

которое дает решения тем более близкие к действительности, чем меньше θ по сравнению с TM ; а так как здесь дело идет о малых значениях u , то с уверенностью можно вместо этого уравнения взять следующее:

$$(v - u)\theta = TM u,$$

иначе

$$\frac{v}{u} = \frac{TM}{\theta} + 1.$$

В наших приборах верхний конец нити прикрепляется к подвижному плечу, несущему указатель, перемещающийся по окружности разделенного на градусы круга. Если при этом коллимационная ошибка (т. е. отсчет, соответствующий значению $v=0$) в точности неизвестна, то этот указатель все же даст разность двух значений v . Другая часть прибора дает с величайшею точностью разность значений угла u , соответствующих положению равновесия; ясно, что значение $\frac{TM}{\theta} + 1$ найдется делением разности двух значений v на разность соответствующих им значений u . Когда опыты, необходимые для определения указанных величин, разделены значительным промежутком времени, то для получения высшей точности необходимо принимать во внимание суточные изменения склонения, что легко достигается совместными наблюдениями на другом приборе, у которого верхний конец нити остается неприкосновенным. Едва ли есть надобность в упоминании, что расстояние между обоими приборами должно быть возможно больше, чтобы они не оказывали заметного влияния друг на друга.

Чтобы показать, какой точности достигают подобные наблюдения, приведем пример из дневника: 22 сентября 1832 г., без учета коллимационной погрешности, наблюдались ниже-следующие значения склонения u и углов v :¹

Наблюдения	Время	Первая стрелка	v	Вторая стрелка
		u		u
I	9 ч. 33 м. утра	+0° 4' 19.5	300°	+0° 2' 12.1
II	9 „ 57 „ „	—0 0 19.6	240	+0 1 37.7
III	10 „ 16 „ „	—0 4 40.5	180	+0 1 18.8

¹ В обоих случаях деления возрастают слева направо.

Таким образом, склонения первой стрелки, отнесенные к первому наблюдению, суть:

$$\begin{aligned} \text{I. } u &= 0^\circ 4' 19'' 5 & v &= 300^\circ \\ \text{II. } u &= +0 \ 0 \ 14.8 & v &= 240 \\ \text{III. } u &= -0 \ 3 \ 47.8 & v &= 180 \end{aligned}$$

Отсюда получаются такие значения величины дроби $\frac{TM}{\theta}$ из наблюдений:

$$\begin{aligned} \text{I и II.} & \quad 881.7 \\ \text{II и III.} & \quad 891.5 \\ \text{I и III.} & \quad 886.6 \end{aligned}$$

Суточные изменения склонения вследствие кручения нити уменьшаются в отношении $\frac{n}{n+1}$, где положено $\frac{TM}{\theta} = n$; это влияние кручения можно считать ничтожно малым, если мы употребляем нити со столь малым кручением, как в предыдущем примере.

Что же касается времени колебаний (бесконечно малых), то, пользуясь началами динамики, легко получить, что вследствие кручения нитей оно уменьшается в отношении $\sqrt{\frac{n}{n+1}}$ [15]. Собственно говоря, все это относится к случаю, когда $v=0$. Формулы будут справедливыми и в общем случае при предположении

$$\frac{TM \cos u^0}{\theta} = n,$$

причем через u^0 обозначено значение u , соответствующее равновесию; но разница, наверное, не будет заметна.

§ 9

Коэффициент θ существенно зависит от длины, толщины и материала нити и, кроме того, у металлических нитей несколько зависит от температуры, а у шелковых от влажности воздуха; но он не зависит для металлических нитей, а может быть и для шелковых, если они ординарные, от величины

нагрузки, висящей на нити. Иначе обстоит дело для сложных шелковых нитей, когда приходится подвешивать тяжелые магниты; здесь θ возрастает вместе с нагрузкой, но все-таки эта величина остается гораздо меньшей, нежели для металлических нитей, при одинаковой длине и прочности.

Так, применяя способ, совершенно подобный развитому выше (но с другою нитью и с другими стрелками), мы получили $n=597.4$, когда полная нагрузка составляла 496.2 г, и $n=424.8$, когда нагрузка была увеличена до 710.8 г; или в первом случае было $\theta=0.0016740 \text{ ТМ}$ и во втором $\theta=0.0023542 \text{ ТМ}$. Нить длиной 800 мм состояла из 32 отдельных нитей,¹ каждая из которых надежно выносила нагрузку в 30 г и которые располагались так, чтобы натяжение их было одинаковое. Впрочем, можно предположить, что θ состоит из постоянной части и части, пропорциональной нагрузке, и что постоянная часть равна сумме значений θ для отдельных ординарных нитей. При таком предположении (до сих пор еще недостаточно обоснованном опытами) в приведенном примере постоянная часть составляет 0.0001012 ТМ ; следовательно, значение θ для ординарной нити равно 0.00000316 ТМ . На основании найденного ниже значения ТМ из этой гипотезы следует, что момент реакции ординарной нити при закручивании ее на дугу, равную радиусу ($57^\circ 18'$), равняется весу 1 мг при плече около $\frac{1}{17}$ мм.

§ 10

Если колеблющееся тело имеет правильную форму и однородную массу, то момент инерции K может быть вычислен известным способом. Например, если тело имеет форму прямоугольного параллелепипеда, длины ребер которого суть a , b , c , плотность d , следовательно масса $q=abcd$, то мо-

¹ Собственно говоря, эти нити не являются на самом деле ординарными, но продаются за таковые.

мент инерции K относительно оси, параллельной стороне c , проведенной через центр тяжести, будет равен $\frac{1}{12}(a^2 + b^2)q$, и так как для магнитов такой формы сторона a , параллельная магнитной оси, гораздо длиннее стороны b , то для грубых опытов можно полагать $K = \frac{1}{12}a^2q$.

Но для точных опытов, даже с простыми магнитами, едва ли допустимо подобное предположение о полной однородности массы и правильности формы, тем более для наших опытов, при которых магниты имеют сложное приспособление для подвеса, совершенно невозможно определить момент инерции вычислением, и необходимо было прибегнуть к другому способу точного определения момента инерции K .

К магниту присоединялась деревянная шина, к которой прикреплялись два равных грузика, опиравшиеся тонкими остриями в точках A и B шины; эти точки располагались на горизонтальной прямой в одной вертикальной плоскости с осью подвеса в равных удалениях по обе стороны от оси.

Обозначим массу каждого грузика через p и расстояние AB через $2r$; от прибавления этого приспособления момент инерции K увеличится на $C + 2pr^2$, где C есть сумма моментов инерции шины и грузиков относительно оси подвеса. Таким образом, если будут наблюдаемы времена колебаний незагруженного магнита и магнита, нагруженного на двух расстояниях $r = r'$ и $r = r''$, и продолжительности колебаний (по приведении к бесконечно малым амплитудам и исключении кручения) окажутся равными t, t', t'' , то получатся уравнения:

$$\begin{aligned} TMt^2 &= \pi^2 K, \\ TMt'^2 &= \pi^2 (K + C + 2pr'^2), \\ TMt''^2 &= \pi^2 (K + C + 2pr''^2), \end{aligned}$$

из которых можно определить три неизвестных TM, K и C . Можно получить еще бóльшую точность, определив для

нескольких расстояний r' , r'' , r''' ... соответствующие времена колебаний t' , t'' , t''' ..., и найдя по способу наименьших квадратов неизвестные x и y , которые с наибольшей возможной точностью удовлетворяют уравнениям:

$$t' = \sqrt{\frac{r'^2 + y}{x}},$$

$$t'' = \sqrt{\frac{r''^2 + y}{x}},$$

$$t''' = \sqrt{\frac{r'''^2 + y}{x}} \dots \text{и т. д.}$$

Отсюда получается:

$$TM = 2\pi^2 p x,$$

$$K + C = 2p y.$$

Относительно этого метода надо заметить следующее:

I. Если применяется не слишком гладкий магнит, то достаточно на него просто положить шину; когда же поверхность очень гладкая, так что трение не может вполне устранить скольжения шины, то необходимо скрепить шину с прочими частями подвеса так, чтобы весь подвес с магнитом двигался как одно твердое тело. В обоих случаях надо заботиться, чтобы точки A и B с достаточной точностью лежали на горизонтальной прямой.

II. Так как совокупность таких испытаний продолжается несколько часов, то нельзя пренебрегать изменяемостью земного магнетизма за этот промежуток времени, если требуется наивысшая точность; поэтому прежде чем решать уравнения, необходимо привести наблюдаемые времена к постоянному значению силы T , например к среднему значению при первом наблюдении. Для этой цели необходимо производить одновременно наблюдения со вторым магнитом (как указано в § 8); если при этом продолжительность одного колебания

для средних моментов отдельных опытов получится равной $u, u', u'', u''' \dots$, то для вычислений, вместо наблюдаемых значений $t, t', t'', t''' \dots$, надо брать

$$\frac{ut'}{u'}, \quad \frac{ut''}{u''}, \quad \frac{ut'''}{u'''} \text{ и т. д.}$$

III. Подобное замечание относится и к изменяемости величины M , вызываемой изменением температуры, если таковое происходило при опытах. Однако ясно, что описанное выше приведение уже само по себе содержит эту поправку величины M , если оба магнита подвергались одинаковым температурным изменениям, и влияние температуры для них одинаково.

IV. В том случае, когда дело идет только об определении значения TM , первое испытание является лишним. Однако полезно прибавить к опытам с нагруженным магнитом и опыт с незагруженным, чтобы определить и величину K для использования ее при испытаниях с тем же магнитом в других случаях, так как эта величина остается неизменной, хотя бы T и M изменялись с течением времени.

§ 11

Для лучшего уяснения этого метода приведем один пример из большого числа его применений.

Опыты, произведенные 11 сентября 1832 г., дали результаты, показанные в таблице на стр. 49.

Время наблюдалось по хронометру, отстававшему от среднего времени в сутки на 14.24 сек. Вес каждого из двух грузиков составлял 103.2572 г. Расстояния измерялись в миллиметрах с микроскопической точностью. Продолжительность одного колебания выводилась не менее, как из 100 колебаний (для пятого наблюдения с первым магнитом даже из 677); в таблице они показаны приведенными к бесконечно малой амплитуде; впрочем, эти приведения незаметны вследствие

Опыты	Одновременные колебания		
	первого магнита		второго магнита
	нагрузка	одно колебание	одно колебание
I	$r = 180$ мм	24.63956 сек.	17.32191 сек.
II	$r = 130$	20.77576	17.32051
III	$r = 80$	17.66798	17.31653
IV	$r = 30$	15.80310	17.30529
V	Без нагрузки	15.22990	17.31107

малости амплитуд,¹ принятых для нашего прибора без ущерба для большой точности.

Мы приведем сперва времена колебаний к среднему значению TM , имевшему место при пятом испытании, используя п. II предыдущего параграфа, затем исключим влияние кручения умножением на $\sqrt{\frac{n+1}{n}}$, где для первых четырех испытаний $n=424.8$ и для пятого испытания $n=597.4$ (§ 9); наконец, приведем эти времена к среднему солнечному времени умножением на $\frac{86400}{86385.76}$ и таким образом получим:

I. 24.65717 сек. = t'	для $r' = 180$ мм
II. 20.79228 сек. = t''	для $r'' = 130$ мм
III. 17.68610 сек. = t'''	для $r''' = 80$ мм
IV. 15.82958 сек. = t''''	для $r'''' = 30$ мм
V. 15.24515 сек. = t	для ненагруженной стрелки.

Приняв за единицы времени, длины и массы секунду,

¹ Так, амплитуда колебаний в первом опыте была вначале $0^\circ 37' 26''$, в конце $0^\circ 28' 34''$; в пятом опыте — вначале $1^\circ 10' 21''$, после 177 колебаний $0^\circ 45' 35''$, после 677 колебаний $0^\circ 6' 44''$.

миллиметр, миллиграмм, так что $p = 103257.2$, получим на основании первого и четвертого испытаний:

$$TM = 179\,641\,070; \quad K + C = 4\,374\,976\,000.$$

Затем из пятого испытания:

$$K = 4\,230\,282\,000;$$

следовательно,

$$C = 144\,694\,000.$$

Если же воспользоваться для вычислений всеми наблюдениями, то удобнее всего применить способ наименьших квадратов следующим образом. Мы будем исходить из приближенных значений неизвестных x и y , следующих из первого и четвертого опытов; обозначая поправки к ним через ξ , η , положим:

$$x = 88.13646 + \xi, \quad y = 21184.85 + \eta.$$

Отсюда по известному способу получаются вычисленные значения для времен t' , t'' , t''' , t'''' :

$$t' = 24.65717 - 0.13988\xi + 0.00023008\eta,$$

$$t'' = 20.78731 - 0.11793\xi + 0.00027291\eta,$$

$$t''' = 17.69121 - 0.10036\xi + 0.00032067\eta,$$

$$t'''' = 15.82958 - 0.8980\xi + 0.00035838\eta;$$

сравнив эти выражения с наблюдаемыми значениями, получим после применения способа наименьших квадратов:

$$\xi = -0.3230; \quad \eta = -12.38;$$

$$x = 88.10416; \quad y = 21172.47.$$

Отсюда, наконец, следует:

$$TM = 179\,575\,250; \quad K + C = 4\,372\,419\,000$$

и затем, принимая в расчет первый опыт, получим:

$$K = 4\,228\,792\,400; \quad C = 143\,686\,600 [^{16}].$$

Я прибавлю еще таблицу сличения времен, вычисленных на основании значений x и y и наблюдаемых.

Опыты	Вычисленное время	Наблюдаемое время	Разность
I	24.65884 сек.	24.65717 сек.	+0.00167 сек.
II	20.78774	20.79228	—0.00454
III	17.69046	17.68610	+0.00436
IV	15.82805	15.82958	—0.00153

Длина секундного маятника в Геттингене составляет 994.126 мм, поэтому сила тяжести выразится через ту единицу ускоряющей силы, которая положена в основание предыдущих расчетов, и составит 9811.63; поэтому, если принять за единицу силу тяжести, то будет $TM=18302.29$. Это число показывает, сколько миллиграммов производит под действием силы тяжести давление на плече длиною в один миллиметр, равное той силе, с которой земной магнетизм стремится вращать испытуемый магнит вокруг вертикальной оси [17].

§ 12

После того как мы нашли произведение горизонтальной составляющей T земной магнитной силы на магнитный момент M испытуемого магнита, переходим ко второй части нашего исследования, — именно к определению отношения $\frac{M}{T}$. Мы этого достигнем сравнением действия этого магнита на другой магнит с действием земного магнетизма, причем это действие, как уже изложено во введении, может быть наблюдаемо или в состоянии движения, или в состоянии равно-

весия. Мы часто применяли оба метода; так как последний по многим причинам предпочтительнее первого, то мы ограничимся этим последним, тем более, что подобным же образом без затруднений может быть рассмотрен и первый.

§ 13

Условия равновесия подвижного тела, находящегося под действием любых сил, согласно началу возможных перемещений, легко приводятся к одной формуле, именно: сумма произведений каждой силы на проекцию бесконечно малого перемещения точки ее приложения на направление силы должна быть таковой, что при невозможном, т. е. несовместимом с условиями движения, она достигала бы значения положительного, так что когда возможны виртуальные движения и в обратном направлении, то эта сумма, которую мы обозначим через $d\Omega$, для возможного движения равна нулю^[18].

Подвижное тело, которое мы здесь рассматриваем, является магнитом, прикрепленным в точке G к нити, имеющей кручение и закрепленной своим верхним концом. Эта нить препятствует лишь увеличению расстояния точки G от закрепленного конца нити, которое не должно превышать длины нити, так что и здесь, подобно тому как и для свободного тела, положение этого тела зависит от шести переменных; значит, равновесие его определяется шестью условиями. Но так как здесь решение задачи состоит лишь в определении отношения $\frac{M}{T}$, то достаточно рассмотреть возможное перемещение, состоящее в повороте около вертикальной оси, проходящей через точку G . Очевидно, что эту ось можно принимать за неподвижную и считать переменным лишь угол, заключенный между вертикальною плоскостью, в которой находится магнитная ось, и плоскостью магнитного меридиана. Этот угол мы обозначим через u и будем его считать от северной части меридиана к востоку.

§ 14

Представим себе, что подвижный магнит подразделен на бесконечно малые элементы и пусть координаты любого элемента суть x, y, z , и e — количество содержащегося в этом элементе свободного магнетизма. Начало координат возьмем внутри магнита в произвольной точке h , находящейся на отвесной линии, проведенной через G ; оси координат x и y берем в горизонтальной плоскости, ось x по магнитному меридиану к северу, y — к востоку, координату z считаем вверх. При этих обозначениях действие земного магнетизма на элемент e дает слагаемое величины $d\Omega$, равное $Tedx$.

Подобным же образом подразделяем и объем второго магнита на бесконечно малые элементы и пусть координаты какого-либо элемента суть X, Y, Z и количество свободного магнетизма в нем E ; наконец, пусть

$$r = \sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2}.$$

При таких обозначениях действие элемента E на элемент e даст в сумме $d\Omega$ слагаемое $\frac{eEdr}{r^n}$, если предположить, что это действие обратно пропорционально r^n .

Обозначим через N значение u , соответствующее незакрученному состоянию нити, тогда момент силы кручения нити будет выражаться $\theta(N-u)$; эту силу можно рассматривать так, как если бы на каждый из концов какого-либо горизонтального диаметра нити, проходящего через G , действовала касательная сила $\frac{\theta(N-u)}{D}$, где D есть длина этого диаметра; легко видеть, что отсюда в выражение суммы $d\Omega$ войдет часть $\theta(N-u) du$.

Вес частиц магнита, очевидно, ничего не вносит в количество $d\Omega$, так как изменяется лишь переменная u ; таким образом, мы имеем равенство:

$$d\Omega = \sum Tedx + \sum \frac{eEdr}{r^n} + \theta(N-u) du,$$

причем суммирование распространяется на все элементы e в первом члене, на все сочетания элементов e с элементами E во втором члене. Отсюда ясно, что условие устойчивого равновесия состоит в том, чтобы величина

$$\Omega = \sum Tex - \sum \frac{eE}{(n-1)r^{n-1}} - \frac{1}{2} \theta (N-u)^2$$

была бы максимумом.

§ 15

Соответственно нашей цели следует производить наблюдения так, чтобы магнитные оси каждого магнита были горизонтальны и чтобы магниты лежали бы на одной высоте, поэтому в дальнейшем мы ограничим вычисления этими предположениями.

Точки первого магнита будем относить к осям координат, неизменно с ним связанным, взяв за их начало точку h и направив первую ось по магнитной оси магнита; вторую ось возьмем горизонтально вправо от первой и третью вертикально вверх; координаты элемента e относительно этих осей обозначим через a , b , c .

Точно так же пусть A , B , C — координаты элемента E по отношению к осям, подобным же образом неизменно связанным со вторым магнитом; начало осей взято в точке H , лежащей близко к середине этого магнита и на одной высоте с точкой h . Положение точки H всего удобнее можно было бы определять ее расстоянием от точки h и направлением прямой, соединяющей эти точки, если бы дело шло об одном наблюдении; но в нашем случае требуется всегда несколько испытаний, относящихся к различным положениям точки H , которые хотя и лежат на одной прямой, но не обязательно расположены на прямой, проходящей через точку h ; поэтому лучше с самого начала распорядиться так, чтобы вся система наблюдений такого рода зависела только от одной переменной. Поэтому отнесем точку H к произвольной точке h' , которая лежит в той же горизонталь-

ной плоскости близ h , и обозначим координаты точки h' через $\alpha, \beta, 0$; положим, что расстояние $h'H = R$, и угол, составляемый направлением прямой $h'H$ с магнитным меридианом, обозначим через ψ . Если мы обозначим еще через U угол между магнитною осью второго магнита с магнитным меридианом, то получим^[19]:

$$\begin{aligned}x &= a \cos u - b \sin u, \\y &= a \sin u + b \cos u, \\z &= c, \\X &= \alpha + R \cos \psi + A \cos U - B \sin U, \\Y &= \beta + R \sin \psi + A \sin U + B \cos U, \\Z &= C.\end{aligned}$$

Таким образом, подготовлено все, что требуется для разложения суммы Ω и дроби $\frac{d\Omega}{du}$, которая для положения равновесия равна нулю.

§ 16

Прежде всего, имеем:

$$\sum Tex = T \cos u \sum ae - T \sin u \sum be = mT \cos u,$$

если обозначить момент свободного магнетизма первого магнита $\sum ae$ через m , и если учесть, что $\sum be = 0$; таким образом, в выражении $\frac{d\Omega}{du}$ слагаемое, происходящее от первого члена выражения Ω , есть $-mT \sin u$. Положив для краткости

$$k = \alpha \cos \psi + \beta \sin \psi + A \cos(\psi - U) + B \sin(\psi - U) - \\ - a \cos(\psi - u) - b \sin(\psi - u)$$

$$l = [\alpha \sin \psi - \beta \cos \psi + A \sin(\psi - U) - B \cos(\psi - U) - \\ - a \sin(\psi - u) + b \cos(\psi - u)]^2 + (C - c)^2,$$

получим^[20]:

$$r^2 = (R + k)^2 + l.$$

Так как при этих опытах R должно быть гораздо больше размеров каждого из магнитов, то величина $\frac{1}{r^{n-1}}$ разлагается в быстро сходящийся ряд

$$\frac{1}{r^{n-1}} = R^{-(n-1)} - (n-1)kR^{-n} + \left(\frac{n^2-n}{2}k^2 - \frac{n-1}{2}l\right)R^{-(n+1)} - \\ - \left[\frac{1}{6}(n^3-n)k^3 - \frac{1}{2}(n^2-1)kl\right]R^{-(n+2)} + \dots,$$

закон которого было бы легко составить, если бы стоило затрачивать на это труд.

Отдельные члены суммы $\sum \frac{eE}{r^{n-1}}$ после замены величин k и l их значениями будут содержать множитель вида

$$\sum eEa^\lambda b^\mu c^\nu A^{\lambda'} B^{\mu'} C^{\nu'},$$

который равен произведению множителей

$$\sum ea^\lambda b^\mu c^\nu \quad \text{и} \quad \sum EA^{\lambda'} B^{\mu'} C^{\nu'},$$

зависящих от магнитного состояния первого и второго магнитов.

То, что нужно принять во внимание при этом выводе, сводится к равенствам:

$$\sum e = 0; \quad \sum ea = m; \quad \sum eb = 0; \quad \sum ec = 0; \\ \sum E = 0; \quad \sum EA = M; \quad \sum EB = 0; \quad \sum EC = 0,$$

причем M представляет магнитный момент свободного магнетизма второго магнита.

В том частном случае, когда форма первого магнита (подвижного) и распределение в нем магнетизма симметричны относительно продольной оси, так что всегда есть два таких элемента, у которых a и e имеют значения противоположные, b и c — одинаковые, и середина магнита совпадает с точкою h , всегда будет $\sum ea^\lambda b^\mu c^\nu = 0$ для четного числа $\lambda + \mu + \nu$.

То же самое относится и ко второму магниту, когда его форма и распределение магнетизма в нем симметричны по отношению к точке H .

Таким образом, в сумме $\sum \frac{eE}{r^{(n-1)}}$ коэффициенты при степенях $R^{-(n-1)}$ и R^{-n} уничтожаются; в том же частном случае, когда каждый из двух магнитов имеет симметричную форму и симметрично намагничен, и, кроме того, если центр первого магнита совпадает с точками h и h' , а центр второго совпадает с точкою H , то пропадают и коэффициенты при степенях $R^{-(n+2)}$, $R^{-(n+4)}$, $R^{-(n+6)}$...; если же указанные условия имеют место лишь приближенно, то эти коэффициенты, во всяком случае, будут весьма малы.

Главный член в разложении второй части выражения Ω , происходящий от члена $-\sum \frac{eE}{(n-1)r^{n-1}}$, будет:

$$-\frac{1}{2} R^{-(n+1)} \left(n \sum eEk^2 - \sum eEl \right) = \\ = mMR^{-(n+1)} [n \cos(\psi - U) \cos(\psi - u) - \sin(\psi - U) \sin(\psi - u)].$$

Отсюда следует, что та часть в выражении $\frac{d\Omega}{du}$, которая соответствует влиянию второго магнита, представляется следующим рядом:

$$fR^{-(n+1)} + f'R^{-(n+2)} + f''R^{-(n+3)} + \dots,$$

в котором коэффициенты суть рациональные функции косинусов и синусов углов ψ , u , U и величин α и β , и, кроме того, содержат постоянные величины, зависящие от магнитного состояния магнитов, именно:

$$f = mM[n \cos(\psi - U) \sin(\psi - u) + \sin(\psi - U) \cos(\psi - u)].$$

Полное развитие последующих коэффициентов f' , f'' , ... и т. д. для нашей цели не нужно; достаточно заметить, что, во-первых, при полной симметрии коэффициенты f , f''' , ... и

т. д. исчезают; во-вторых, когда все прочие величины остаются без изменения, угол же ψ увеличивается на два прямых угла (или, что то же, когда расстояние R откладывается по продолжению той же прямой в обратную сторону от точки h), то коэффициенты $f, f'', f''', \dots$ свои величины сохраняют, величины же $f', f''', f^{(4)}, \dots$ изменяют свои знаки на обратные, т. е. предыдущий ряд переходит в следующий:

$$fR^{-(n+1)} - f'R^{-(n+2)} + f''R^{-(n+3)} + \dots$$

Это следует из того, что при таком изменении угла ψ величина k переходит в $(-k)$, величина же l остается без изменения [21].

§ 17

Условие того, чтобы подвижный магнит от совокупного действия сил не получал вращения вокруг вертикальной оси, выражается следующим уравнением:

$$0 = -mT \sin u + fR^{-(n+1)} + f'R^{-(n+2)} + \\ + f''R^{-(n+3)} + \dots - \theta(u - N).$$

Легко распорядиться так, чтобы N , если бы не было равно нулю, было бы весьма малым, а также, чтобы и угол u при тех испытаниях, о которых идет речь, оставался бы в тесных границах; тогда, не опасаясь значительной погрешности, можно заменить член $\theta(u - N)$ через $\theta \sin(u - N)$, тем более, что величина $\frac{\theta}{mT}$ весьма малая.

Обозначим через u^0 то значение угла u , которое соответствует равновесию первого магнита в отсутствии второго, так что

$$mT \sin u^0 + \theta \sin(u^0 - N) = 0;$$

отсюда легко получается

$$mT \sin u + \theta \sin(u - N) = [mT \cos u^0 + \theta \cos(u^0 - N)] \sin(u - u^0),$$

причем вместо всего первого множителя можно принять $mT + \theta$. Тогда наше уравнение будет

$$(mT + \theta) \sin(u - u') = fR^{-(n+1)} + f'R^{-(n+2)} + f''R^{-(n+3)} + \dots$$

Если оставить только первый член $fR^{-(n+1)}$, то решение получается сразу, именно будет:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(u - u^0) &= \\ &= \frac{mM[n \cos(\psi - U) \sin(\psi - u^0) + \sin(\psi - U) \cos(\psi - u^0)] R^{-(n+1)}}{mT + \theta + mM[n \cos(\psi - U) \cos(\psi - u^0) - \sin(\psi - U) \sin(\psi - u^0)] R^{-(n+1)}} \end{aligned}$$

причем в знаменателе член, содержащий множитель $R^{-(n+1)}$, может быть, подобно предыдущему, отброшен, и мы получим:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(u - u^0) &= \\ &= \frac{mM}{mT + \theta} [n \cos(\psi - U) \sin(\psi - u^0) + \sin(\psi - U) \cos(\psi - u^0)] R^{-(n+1)}. \end{aligned}$$

Если же мы пожелаем сохранить и следующие члены, то очевидно, что $\operatorname{tg}(u - u^0)$ разложится в ряд следующего вида:

$$\operatorname{tg}(u - u^0) = FR^{-(n+1)} + F'R^{-(n+2)} + F''R^{-(n+3)} + \dots,$$

в котором, как показывает простое соображение, коэффициенты $F, F', F'', \dots$ и т. д. до коэффициента при степени $R^{-(2n+1)}$ включительно, получаются из выражений

$$\frac{f}{mT + \theta}, \frac{f'}{mT + \theta}, \frac{f''}{mT + \theta} \text{ и т. д.}$$

заменой в них буквы u через u^0 ; начиная же со следующего члена, будут добавляться новые члены, которые для нашей цели нет надобности составлять. Кроме того, очевидно, что величина $u - u^0$ может быть разложена в ряд подобного же вида, который до членов порядка $R^{-(3n+2)}$ будет совпадать с рядом для $\operatorname{tg}(u - u^0)$.

§ 18

Теперь ясно, что если помещать второй магнит в различных точках одной и той же прямой так, чтобы ψ и U сохраняли бы свои значения, а изменялось бы только расстояние R ,

и наблюдать отклонения подвижного магнита от того положения равновесия, которое имеет место при отсутствии второго магнита, т. е. наблюдать угол $u - u^0$, то на основании таких наблюдений решением уравнений могут быть найдены значения коэффициентов F , F' , F'' и пр., которые еще заметны, и мы получим равенство:

$$\frac{M}{T} = \left(1 + \frac{\theta}{T_m}\right) \frac{F}{n \cos(\psi - U) \sin(\psi - u^0) + \sin(\psi - U) \cos(\psi - u^0)},$$

для которого величина $\frac{\theta}{T_m}$ может быть найдена способом, изложенным в § 8.

Для более удобного производства этих наблюдений полезно принять к руководству следующее:

I. Вместо того чтобы сличать значения u с u^0 , предпочтительнее сличать попарно противоположные отклонения переключкою второго магнита так, чтобы R и ψ оставались неизменными, а угол U получил бы приращение, равное двум прямым углам. Обозначим через u' и u'' значения u , соответствующие этим положениям; при полной симметрии и при $u^0 = 0$ должно быть в точности $u'' = -u'$. Но нет необходимости тщательно придерживаться этих условий, ибо ясно, что u' и u'' определяются одинаковыми рядами, первые члены которых в *точности* равны и противоположны по знаку, кроме того, $\frac{1}{2}(u' - u'')$ и $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(u' - u'')$ выражаются подобными же рядами, у которых коэффициент при первом члене в *точности* равен F .

II. Еще лучше пользоваться всякий раз четырьмя опытами, изменив и угол ψ на два прямых, беря расстояния по другую сторону подвижного магнита. Обозначив значения u , соответствующие двум последним опытам, через u''' и u'''' , мы видим, что разность $\frac{1}{2}(u''' - u''')$ выразится рядом, подобным предыдущим, у которого при первом члене коэффициент равняется F .

Необходимо иметь в виду (что легко выводится из предыдущего), что если бы число n было нечетное, то коэффициенты $F, F'', F''', \dots$ до бесконечности в рядах для $u' - u^0$, и $u''' - u^0$ были бы в точности между собою равны, и коэффициенты $F', F''', F^{(5)}, \dots$ до бесконечности равны и с обратными знаками, точно так же для $u'' - u^0$ и $u'''' - u^0$, так что в ряде для $u' - u'' + u''' - u''''$ перемежающиеся члены пропадают. Но в действительности, когда $n=2$, вообще говоря, такого соотношения между рядами $u' - u^0$ и $u''' - u^0$ в точности не существует, так как даже для R^{-6} получаются члены не в точности противоположные; но можно показать, что для выражения $u' - u'' + u''' - u''''$ этот член полностью пропадает, так что будет:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{4} (u' - u'' + u''' - u''') = LR^{-3} + L'R^{-5} + L''R^{-7} + \dots,$$

или, оставляя для общности значение n неопределенным, получим

$$\operatorname{tg} \frac{1}{4} (u' - u'' + u''' - u''') = LR^{-(n+1)} + L'R^{-(n+3)} + L''R^{-(n+5)} + \dots,$$

причем $L = F$.

III. Ясно, что углы ψ и U надо брать так, чтобы малые погрешности измерений их не влияли заметным образом на величину F . Для этой цели надо при заданном значении угла ψ брать значение U так, чтобы F было максимум, а именно, чтобы было:

$$\operatorname{ctg} (\psi - U) = n \operatorname{tg} (\psi - u^0);$$

тогда

$$F = \frac{mMt}{mT + \theta} \sqrt{n^2 \sin^2 (\psi - u^0) + \cos^2 (\psi - u^0)}.$$

Вместе с тем угол ψ надо брать так, чтобы это значение F становилось наибольшим или наименьшим, что имеет место при $\psi - u^0 = 90^\circ$ или $\psi - u^0 = 270^\circ$, причем

$$F = \pm \frac{nmT}{mT + \theta}, \text{ если } \psi - u^0 = 0; \text{ если же } \psi - u^0 = 180^\circ, \text{ то}$$

$$F = \pm \frac{mM}{mT + \theta}.$$

§ 19

Таким образом, в нашем распоряжении имеется два метода, наиболее выгодных для применения; сущность этих методов показана следующими схемами^[22].

Первый метод

Центр второго (отклоняющего) магнита и его магнитная ось располагаются на прямой линии, перпендикулярной к магнитному меридиану.¹

Отклонение	Направление	Положение магнита	Центр на	Северный полюс на
$u = u'$	$\psi = 90^\circ$	$u = 90^\circ$	Восток	Восток
$u = u''$	$\psi = 90$	$u = 270$	Восток	Запад
$u = u'''$	$\psi = 270$	$u = 90$	Запад	Восток
$u = u''''$	$\psi = 270$	$u = 270$	Запад	Запад

Второй метод

Центр второго (отклоняющего) магнита располагается в магнитном меридиане.

¹ Строго говоря, перпендикулярной к вертикальной плоскости, соответствующей значению $u = u^0$, т. е. плоскости, в которой лежит ось магнита, находящегося в равновесии при отсутствии отклоняющего магнита. На практике разницей можно пренебречь как вследствие малости, так и на основании соотношений, изложенных в п. III предыдущего параграфа.

Отклонение	Положение магнита	Центр на	Северный полюс на
$u = u'$	$\psi = 0^\circ \quad u = 270^\circ$	Север	Запад
$u = u''$	$\psi = 0 \quad u = 270$	Север	Восток
$u = u'''$	$\psi = 180 \quad u = 90$	Юг	Запад
$u = u''''$	$\psi = 180 \quad u = 90$	Юг	Восток

Если положить

$$\frac{1}{4} (u' - u'' + u''' - u''') = v,$$

$$\operatorname{tg} v = LR^{-(n+1)} + L'R^{-(n+3)} + L''R^{-(n+5)} + \dots,$$

то для первого метода будет

$$L = \frac{nmM}{mT + \theta}$$

и для второго

$$L = \frac{mM}{mT + \theta}.$$

§ 20

На основании теории решения уравнений легко прийти к заключению, что вследствие неизбежных ошибок наблюдения результат вычисления тем менее надежен, чем большее число коэффициентов подлежит определению. На основании этого тем более надо ценить метод, развитый в п. II § 18, так как при этом отпадают коэффициенты при $R^{-(n+2)}$, $R^{-(n+4)}$.

При полной симметрии эти коэффициенты отпали бы сами собой, но было бы слишком неосторожно на это полагаться. Впрочем, небольшое отклонение от симметрии при первом методе оказывает гораздо меньшее влияние, нежели при

втором, и если при нем заботиться, по крайней мере, о том, чтобы точка h' , от которой измеряются расстояния, лежала с достаточною точностью в магнитном меридиане, проходящем через точку h , то между $u' - u''$ и $u''' - u''''$ может лишь образоваться едва заметная разница.

Во втором же методе дело обстоит иначе, в особенности если подвес с магнитом приходится подвешивать эксцентрично. По этому методу, когда помещение не дает возможности производить наблюдения с обеих сторон, получается гораздо меньшая точность. Кроме того, первый метод и потому предпочтительнее, что при нем получается в два раза большая величина для L , нежели при втором, ибо истинная величина $n=2$. Впрочем, если при втором методе желательно по возможности устранить зависящий от эксцентричности подвеса член $R^{-(n+2)}$, то надо выбирать точку h' так, чтобы центр магнита (при $u=u^0$) лежал посредине между точками h и h' ; вычисление же, которое это показывает, для краткости изложения здесь не приводится.

§ 21

В предыдущих вычислениях величина показателя n оставлена неопределенной. С 24 по 28 июня 1832 г. было произведено две серии опытов, причем расстояние изменялось до столь большой величины, как дозволяло помещение, при этом самым наглядным образом обнаружено то значение n , которое имеет место в действительности.

При первой серии отклоняющий магнит (согласно первому способу, § 19) ставился на прямой, перпендикулярной к меридиану, при второй серии — в самой плоскости меридиана.

Здесь приводится сводка результатов этих опытов, причем расстояния R выражены в метрах и значение угла $\frac{1}{4}(u' - u'' + u''' - u''')$ обозначено для первой серии через v , для второй — через v' .

R	v	v'	R	v	v'
1.4 м	—	1°57' 24"8	1.9 м	0°43' 21.8	0°22' 9"2
1.2	—	1 29 40.5	2.0	0 37 16.2	0 19 1.6
1.3	2°13' 51"2	1 10 19.3	2.1	0 32 4.6	0 16 24.7
1.4	1 47 28.6	0 55 58.9	2.5	0 18 51.9	0 9 36.1
1.5	1 27 19.1	0 45 14.3	3.0	0 11 0.7	0 5 33.7
1.6	1 12 7.6	0 37 12.2	3.5	0 6 56.9	0 3 28.9
1.7	1 0 9.9	0 30 57.9	4.0	0 4 35.9	0 2 22.2
1.8	0 50 52.5	0 25 59.5	—	—	—

Из этих цифр даже при поверхностном взгляде видно, что при больших расстояниях числа v приблизительно в два раза больше чисел v' и что числа каждой серии приблизительно обратно пропорциональны кубам расстояний, так что не остается сомнения относительно правильности значения $n=2$.

Чтобы подтвердить справедливость этого закона при отдельных опытах, эти числа были обработаны по методу наименьших квадратов, причем получены следующие значения коэффициентов:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} v &= 0.086870 R^{-3} - 0.002185 R^{-5}, \\ \operatorname{tg} v' &= 0.043435 R^{-3} + 0.002449 R^{-5}.\end{aligned}$$

В приведенной ниже сводке вычисленные по этим формулам результаты сопоставлены с наблюдаемыми.

Вычисленные значения

R	v	Разность	v'	Разность
1.1 м	—	—	1°57' 22"0	+2"8
1.2	—	—	1 29 46.5	—6.0
1.3	2°13' 50"4	+ 0"8	1 10 13.3	+6.0

Продолжение

R	v	Разность	v'	Разность
1.4	1°47'24".1	+ 4".5	0°55'58".7	+0".2
1.5	1 27 28.7	— 9.6	0 45 20.9	—6.6
1.6	1 12 10.9	— 3.3	0 37 15.4	—3.2
1.7	1 0 14.9	— 5.0	0 30 59.1	—1.2
1.8	0 50 48.3	+ 4.2	0 26 2.9	—3.4
1.9	0 43 14.0	+ 7.8	0 22 6.6	+2.6
2.0	0 37 5.6	+10.6	0 18 55.7	+5.9
2.1	0 32 3.7	+ 0.9	0 16 19.8	+4.9
2.5	0 19 2.1	—10.2	0 9 38.6	—2.5
3.0	0 11 1.8	— 1.1	0 5 33.9	—0.2
3.5	0 6 57.1	— 0.2	0 3 29.8	—1.0
4.0	0 4 39.6	— 3.7	0 2 20.5	+1.7

§ 22

Вышеприведенные опыты были произведены, главным образом, с целью установления закона магнитного взаимодействия с полной достоверностью и вместе с тем для того, чтобы определить, сколько членов брать в рядах и какая точность достижима при этих опытах. Этими опытами обнаружено, что когда расстояния не меньше четырехкратной длины магнитов, то двух членов достаточно.¹

Разности, полученные при сличении результатов, отнюдь не следует приписывать только погрешности наблюдений, так как различные меры предосторожности, от которых можно ожидать лучшего согласия между наблюдениями, тогда еще не были подготовлены. Сюда относятся поправки на часовое изменение напряженности земного магнетизма,

¹ Длина магнитов в этих опытах составляла около 0.3 м; если бы взять еще и член R^{-7} , то точность результатов вычислений скорее понизилась бы, нежели повысилась [23].

которое следует принимать во внимание, применяя вспомогательный магнит по способу, указанному в п. II § 10.

Однако чтобы показать значение напряженности земного магнетизма, каким оно получается из произведенных опытов, приведем сводку относящихся сюда опытов.

Значение отношения $\frac{\theta}{T_m}$ для первого магнита и его нити подвеса было определено по способу, изложенному в § 8, и оказалось равным $\frac{1}{251.96}$.

Отсюда следует $\frac{M}{T} = 0.0436074$, если принять метр за единицу длины. Но если взять миллиметр, то это число надо умножить на 1000^3 , так что будет $\frac{M}{T} = 43\,607\,400$.

Для второго магнита оказалось по опытам, произведенным 28 июня, так, как это описано в § 11 для другого магнита, причем за единицы были приняты миллиметр, миллиграмм и секунда среднего солнечного времени $TM = 135\,457\,900$. Исключая величину M , имеем отсюда $T = 1.7625$.

§ 23

Когда производятся опыты для определения абсолютной величины T напряженности земного магнетизма, имеет важное значение, чтобы совокупность этих опытов заканчивалась в течение возможно непродолжительного времени, о чем и надо заботиться, чтобы не происходило заметного изменения в магнитном состоянии применяемых для опытов магнитов. Поэтому при наблюдении отклонений подвижного магнита следует применять только первый способ из описанных в § 20, выбрав два подходящих расстояния, предполагая, что двух членов ряда достаточно.

Из многих применений этого метода приводим здесь такой пример, в котором соблюдались самые тщательные предосторожности и расстояния измерялись с микроскопической точностью.

Опыты производились 18 сентября 1832 г. с двумя приборами, которые мы обозначим буквами А и В, и с тремя магнитами, которые мы обозначим № 1, № 2, № 3. Магниты № 1 и № 2 те самые, которые названы первым и вторым в § 11. Опыты разделяются на два отдела.

Сперва наблюдались одновременные колебания магнита № 1 в приборе А и магнита № 2 в приборе В. Продолжительность одного колебания, приведенная к бесконечно малой амплитуде, для магнита № 1 оказалась 15.22450 сек., для магнита № 2 17.29995 сек., причем число колебаний было 305 и 264.

Затем в прибор А был подвешен магнит № 3, магнит же № 1 был помещен на перпендикулярный к магнитному меридиану стержень с восточной и с западной стороны двояким образом, и при каждом положении магнита № 1 наблюдалось отклонение магнита № 3.

Эти опыты, произведенные при двух значениях расстояния R , дали следующие значения угла ν , причем сохранено обозначение §§ 19 и 21, а именно:

$$\begin{aligned} R &= 1.2 \text{ м, } \nu = 3^{\circ}42'19''.4, \\ R' &= 1.6 \text{ м, } \nu' = 1^{\circ}34'19''.3. \end{aligned}$$

При этом опыте наблюдались также колебания магнита № 2 в приборе В. Среднему моменту времени соответствует продолжительность колебания, приведенная к бесконечно малой амплитуде, равная 17.29484 сек., выведенная из 414 качаний. Время замечалось по часам, отстававшим на 14.24 сек. в сутки.

Обозначив соответственно через M и m магнитные моменты магнитов № 1 и № 3 и через θ постоянную кручения нити прибора А при нагрузке магнитами № 1 или № 3 (вес этих магнитов почти одинаковый), получаем:

$$\frac{\theta}{TM} = \frac{1}{597.4},$$

подобно тому как в § 11

$$\frac{\theta}{T_m} = \frac{1}{721.6},$$

так как магнит № 3 был сильнее намагничен, нежели № 1.

Момент инерции магнита № 1 был определен еще ранее (§ 11) и составлял $K = 4\,228\,732\,400$, когда за единицы были приняты миллиграмм и миллиметр.

Изменение температуры в обоих залах, в которых были установлены приборы, в продолжение опытов было столь малое, что нет надобности принимать его во внимание.

Перейдем теперь к вычислению напряженности земного магнетизма на основании результатов этих наблюдений. Неравенство колебаний магнита № 2 указывает на небольшое изменение этой напряженности; чтобы получить вполне определенное значение изменения, приведем наблюденную продолжительность одного колебания первого магнита к среднему состоянию напряженности земного магнетизма при второй части опыта. Второй поправкой является поправка на суточный ход часов, третьей — на кручение нити. Таким образом, исправленная продолжительность одного колебания составит

$$15.22450 \frac{17.29484}{17.29995} \frac{86400}{86385.76} \sqrt{\frac{598.4}{597.4}} = 15.23530 = t.$$

Отсюда следует значение произведения

$$TM = \frac{\pi^2 K}{t^2} = 179\,770\,600.$$

Небольшую разницу этого значения и наблюденного 11 сентября, показанного в § 11, надо приписать изменению напряженности земного магнетизма и магнитного момента магнита.

По наблюдению отклонений получаем:

$$F' = \frac{R'^5 \operatorname{tg} v' - R^5 \operatorname{tg} v}{R'^2 - R^2} = 113\,056\,200,$$

принимая за единицу длины миллиметр; отсюда:

$$\frac{M}{T} = \frac{1}{2} F \left[1 + \frac{\theta}{T_m} \right] = 56\,606\,437.$$

Сопоставлением этого числа с значением TM получаем

$$T = 1.782088,$$

что и представляет значение горизонтальной составляющей напряженности земного магнетизма 18 сентября в 5 часов^[24].

§ 24

Вышеприведенные опыты были произведены в астрономической обсерватории, причем место для приборов было выбрано так, чтобы они были возможно удалены от соседства с железом. Тем не менее надо признать, что железо, содержащееся в стенах, окнах и дверях самого здания, наконец железные части установок больших астрономических инструментов, магнетизм которых индуцируется земным магнетизмом, оказывают на подвешенные магниты влияние, которое нельзя считать незаметным. Происходящие от этого силы несколько изменяют не только направление, но и напряженность земного магнетизма, и наши опыты дают не значение напряженности земного магнетизма вообще, а его значение в месте установки прибора А, измененное местными условиями.

Пока железные массы остаются на своих местах и элементы самого земного магнетизма (именно напряженность и направление) не слишком сильно изменяются, то влияние таких масс остается приблизительно постоянным. Что касается величины этого влияния, то она до сих пор остается неизвестной, но я не думаю, чтобы она могла превышать одну или две сотых общей величины напряженности. Во всяком случае, не трудно определить это влияние железных масс опытом по наблюдению одновременных колебаний двух магнитов, из которых один подвешивается в обычном месте

наблюдений, другой — в месте, достаточно удаленном от строений и других возмущающих масс железа; затем магниты обмениваются местами. Но до сих пор не было возможности произвести такие наблюдения.

Самым надежным средством явилось бы особое здание, предназначенное для магнитных наблюдений, в постройке которого железо совсем бы не применялось, что, благодаря королевской щедрости, вскоре будет исполнено.

§ 25

Кроме вышеприведенных, мы произвели много подобных наблюдений, хотя и с меньшею тщательностью. Здесь приводится таблица их результатов, причем опущены все те, которые были произведены до установки точных аппаратов, когда мы пользовались более грубыми средствами и магнитами самых разнообразных размеров, хотя тогда получались все же близкие к истине результаты.

При повторных опытах получены следующие значения T :

№№ наблюдений	Время (1832 г.)	T	№№ наблюдений	Время (1832 г.)	T
I	Май 21	1.7820	VI	Июль 25, 26	1.7845
II	Май 24	1.7694	VII	Сентябрь 9	1.7764
III	Июнь 4	1.7713	VIII	Сентябрь 18	1.7821
IV	Июнь 24—28	1.7625	IX	Сентябрь 27	1.7965
V	Июль 23, 24	1.7826	X	Октябрь 15	1.7860

Наблюдения V—IX произведены все в одном и том же месте, I—IV — в различных местах; наблюдение X является смешанным, ибо отклонение наблюдалось на обычном месте, колебания же в другом. Наблюдения VII и VIII произведены

почти одинаково тщательно; наблюдения IV, V, VI и X — несколько менее тщательно; наблюдения I—III — с гораздо меньшею тщательностью. При наблюдениях I—VIII применялись разные магниты, но все они были почти одного веса (от 400 до 440 г) при одинаковой длине. Для наблюдения X был взят магнит весом 1062 г и длиной 485 мм. Наблюдение IX было произведено для того, чтобы определить, какая точность может быть достигнута с весьма малым магнитом. Вес этого магнита составлял всего 58 г; в остальном тщательность была не меньше, чем при наблюдениях VII и VIII. Не подлежит сомнению, что точность наблюдений может быть заметным образом повышена, если применять еще более тяжелые магниты, например весом в 2000 г или даже в 3000 г^[25].

§ 26

Если напряженность земной магнитной силы T выражается числом k , то предполагается, что с ним сопряжена некоторая единица V , — именно, однородная с T сила, связь которой с другими непосредственно заданными единицами, указанная выше, выражается довольно сложными соотношениями. Поэтому полезно здесь, для достижения полной ясности, снова рассмотреть, какое изменение претерпевает число k , если вместо основных единиц пользоваться другими единицами.

Для установления единицы V необходимо исходить от единицы M^1 свободного магнетизма и единицы расстояния R , и мы положим единицу силы V , равной силе, производимой количеством магнетизма M в расстоянии R .

За единицу M мы приняли такое количество магнитной жидкости, которое, действуя на равное ему количество, помещенное на расстоянии R , производит движущую силу (или, если угодно, давление), равную силе W , принимаемой

¹ Едва ли есть надобность пояснять, что здесь ранее применявшимся буквам придается другой смысл.

за единицу, т. е. силу, равную той силе, которую производит ускоряющая сила A , принятая за единицу, при действии на массу P , принятую за единицу.

К установлению единицы A ведут два пути: ее можно извлечь из подобной силы, непосредственно заданной, например из ускоряющей силы тяжести в месте наблюдения, или же определить A по ее действию, когда она приводит тело в движение. При этом последнем способе, которому мы следовали в наших вычислениях, необходимо ввести две новые единицы, а именно: единицу времени S и единицу скорости C ; тогда за единицу ускоряющей силы принимается такая, которая, действуя в продолжение времени S , производит скорость C . Наконец, за единицу скорости принимается такая скорость, которая при равномерном движении соответствует пространству R , проходимому в продолжение времени S .

Ясно, что величина V зависит от трех единиц: или от R , P , A , или от R , P , S .

Положим теперь, что вместо единиц

$$V, R, M, W, A, P, C, S$$

приняты другие единицы:

$$V', R', M', W', A', P', C', S',$$

связанные между собою такими же соотношениями, как и предыдущие, и что при пользовании мерою V' земной магнетизм выражается числом k' ; надо исследовать отношение этого числа к числу k .

Если положить

$$V = vV', R = rR', M = mM', W = wW';$$

$$A = aA', P = pP', C = cC', S = sS',$$

то

$$v, r, m, w, a, p, c, s$$

будут отвлеченными числами, между которыми имеют место соотношения:

$$kV = k'V' \quad \text{или} \quad kv = k';$$

$$v = \frac{m}{r^2}; \quad \frac{m^2}{r^2} = w = pa; \quad a = \frac{c}{s}; \quad c = \frac{r}{s}.$$

Из этих равенств получим:

$$\text{I. } k' = k \sqrt{\frac{p}{rs^2}};$$

$$\text{II. } k' = k \sqrt{\frac{pa}{r^2}}.$$

Следуя тому же пути, как при наших наблюдениях, мы должны использовать первую формулу; если мы возьмем вместо миллиметра и миллиграмма за единицы метр и грамм, то получим:

$$r = \frac{1}{1000}; \quad p = \frac{1}{1000},$$

следовательно, $k' = k$.

Если взять парижскую линию и берлинский фунт^[26], то будет:

$$r = \frac{1}{2.255829}; \quad p = \frac{1}{467711.4},$$

и мы получим:

$$k' = 0.002196161 k,$$

и значение T для опыта VIII будет $T = 0.0039131$.

Если мы последуем по второму пути и возьмем за единицу ускоряющих сил силу тяжести, то для Геттингенской обсерватории $a = \frac{1}{9811.63}$; тогда, сохраняя миллиметр и миллиграмм, надо числа k умножить на 0.010099554 и изменения единиц рассчитывать по формуле II^[27].

§ 27

Для получения полной величины напряженности земного магнетизма надо его горизонтальную составляющую T умножить на секанс угла наклона.

Наблюдения Гумбольдта показали, что угол наклонения является переменным и в настоящее время уменьшается; так, в декабре 1805 г. он равнялся $69^{\circ}29'$, а в сентябре 1826 г. — $68^{\circ}29'26''$.

Точно так же 23 июня 1832 г., воспользовавшись тем инклитатором, которым пользовался когда-то известный Майер, я получил $68^{\circ}22'52''$. Это как бы показывает, что быстрота уменьшения наклонения убывает, но я считаю это наблюдение недостаточно надежным не только из-за несовершенства прибора, но и вследствие того, что произведенное в обсерватории наблюдение не вполне свободно от возмущающего влияния железных масс.

Впрочем, в будущем и на этот элемент будет обращено большое внимание.

§ 28

В этой статье мы следовали общепринятому объяснению магнитных явлений не только потому, что его вполне достаточно, но и потому, что оно развивается гораздо более простыми вычислениями, нежели другое воззрение, которое приписывает магнетизм гальвано-электрическим токам вокруг частиц магнитных тел.

Я не имел в виду ни подкреплять, ни опровергать это воззрение, которое во многих отношениях заслуживает внимания, ибо это было бы неуместно, так как взаимодействие между элементами таких токов еще недостаточно исследовано.

Какое бы воззрение ни было принято в будущем для магнитных и электромагнитных явлений, оно должно во всем приводить к тем же результатам, как и обычная теория, и то, что на основании этой теории развито в этой статье, может быть изменено по форме, а не по сущности.

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ЗЕМНОГО МАГНЕТИЗМА





Непрестанное усердие, с которым в новейшее время стремятся исследовать направление и величину земной магнитной силы во всех частях земной поверхности, представляет тем более радостное явление, чем очевиднее при этом проявляется чисто научный интерес. В самом деле, сколь ни важно для мореплавания возможно точное знание склонения, но эта потребность не распространяется далее, и все, что лежит вне ее, остается для мореплавания почти безразличным. Однако наука, которая охотно способствует материальным интересам, ими не ограничивается, а требует равного усердия для всех элементов своего исследования.

Результаты магнитных наблюдений представляют на карте земли тремя системами линий, которые называют изогонами, изоклинами, изодинамами. Эти линии весьма значительно изменяют свой вид и свое положение с течением времени, так что их распределение отражает состояние земного магнетизма лишь для определенного времени. Карта склонений Галлея весьма сильно отличается от карты Барлоу 1833 г., и карта наклонов Ханстина 1780 г. отклоняется уже весьма сильно от теперешней карты изоклин. Попытки представить напряженность еще слишком новы, чтобы уже теперь могли быть обнаружены подобные изменения, которые несомненно проявятся с течением времени^[1].

Все подобные карты в настоящее время обладают пробелами и местами ненадежны, но можно надеяться, что если они и не вполне достигнут полноты вследствие недоступ-

ности некоторых частей земной поверхности, они все же будут приближаться к ней быстрыми шагами.

С высшей точки зрения науки такое, возможно полное, представление явлений при помощи наблюдений не есть еще, собственно, ее цель: этим достигается приблизительно то же, что и в том случае, когда астроном наблюдает видимый путь кометы по небу. Имеют лишь кирпичи, а не здание, пока весьма запутанные явления не подчинят некоторому принципу. Подобно тому как астроном, после того как светило исчезло из его поля зрения, лишь начинает главную свою работу, на основании закона тяготения по наблюдениям вычисляет истинный путь и благодаря этому получает возможность с уверенностью указать дальнейший путь светила, так и физик должен поставить себе задачу — по крайней мере поскольку неодинаковые и отчасти менее выгодные обстоятельства это позволяют — исследовать основные силы, которые производят явления земного магнетизма, по их действию и по их величине, связать наблюдения с этими элементами и, таким образом, по меньшей мере с некоторою степенью надежного приближения предугадать явления в тех местностях, куда наблюдения еще не проникли. Во всяком случае хорошо иметь эту высокую цель в виду и испытать доступность путей, к ней ведущих, хотя теперь, вследствие значительного несовершенства данных, дать больше, нежели отдаленное приближение к цели, еще невозможно.

В мое намерение не входит упоминать здесь прежние бесплодные попытки отгадать великую загадку без всяких физических оснований. Физическое основание можно признать лишь за теми попытками, которые считают Землю за настоящий магнит и подчиняют вычислению его действия на расстоянии. Но все попытки этого рода, произведенные до сих пор, имеют то общее, что вместо того, чтобы сперва исследовать, как этот великий магнит должен быть устроен, чтобы вызвать наблюдаемые явления, сразу предполагают

или простое, или весьма сложное строение; чаще исходят из весьма простого предположения и пробуют, согласуются ли явления с такою гипотезою; таким образом, здесь повторяется лишь то, что сообщает история астрономии и естественных наук о началах наших познаний.

Простейшая гипотеза такого рода есть та, когда берется один весьма малый магнит в центре Земли или, точнее (ибо едва ли кто серьезно верил в существование такого магнита), когда предполагается, что распределение магнетизма по Земле таково, что его полное внешнее действие равносильно действию воображаемого бесконечно малого магнита, приблизительно подобно тому, как сила тяжести на однородном шаре одинакова с притяжением массы, сосредоточенной в центре шара. При таком предположении те две точки, в которых продолжение магнитной оси центрального магнита пересекает поверхность шара, являются полюсами Земли; в них магнитная стрелка становится вертикально и напряженность наибольшая; вместе с тем по большому кругу посередине между обоими полюсами (по магнитному экватору) наклонение равно нулю и напряженность равна половине полярной; между полюсами и экватором как наклонение, так и напряженность зависит только от расстояния до экватора (магнитной широты) и притом так, что тангенс наклонения равен удвоенному тангенсу магнитной широты; наконец, направление горизонтальной стрелки повсюду совпадает с направлением большого круга, проведенного к северному магнитному полюсу. Однако природа согласуется со всеми этими необходимыми следствиями этой гипотезы лишь с грубым приближением; в действительности линия нулевого наклонения не есть большой круг, а кривая двойкой кривизны; при равных наклонениях не находят равных напряженностей, направления горизонтальной стрелки далеко не сходятся в данной точке, и т. п. Таким образом, достаточно поверхностного рассмотрения, чтобы отбросить эту гипотезу; тем не менее даже теперь применяют одно из вышеприведенных

заклучений, чтобы вывести из наблюдений, произведенных при малых наклонениях, положение нулевой линии.

Из подобной гипотезы уже 80 лет тому назад исходил Тобиас Майер, с тою разницею, что он помещал бесконечно малый магнит не в центре Земли, а приблизительно на расстоянии от него в одну седьмую радиуса; но он удержал, вероятно для упрощения вычислений, совершенно произвольное ограничение, что плоскость, перпендикулярная к оси магнита, проходит через центр Земли; таким образом, он нашел, — правда, для весьма малого числа мест, — весьма хорошее совпадение вычисленных и наблюденных склонений и наклонений. Однако при более детальной проверке оказалось бы, что в общем явление описывается не многим лучше, нежели при первой гипотезе. Измерений напряженности в те времена еще совсем не производилось.

Ханстин сделал шаг дальше, приняв гипотезу *двух* бесконечно малых магнитов, не одинаково расположенных и различной силы, чтобы объяснить ими явления.

Решающей проверкой допустимости или недопустимости гипотезы оставалось все-таки сличение полученных при помощи ее результатов с наблюдениями. Ханстин сличил свои вычисления с наблюдениями в 48 различных местах, среди которых лишь в 12 была определена и напряженность, и лишь 6, в которых определены все три элемента; но и здесь попадаются разности между вычислением и наблюдением, достигающие для наклонения почти 13° .¹

Если столь значительные отклонения признать несоответствующими требованиям удовлетворительной теории, то нельзя не притти к заключению, что магнитное состояние Земли не есть такое, для которого сосредоточение в одном или двух пунктах бесконечно малых магнитов может счи-

¹ Для склонения встречается один раз даже разность в 29° , но следует считать за погрешность вычисления не число градусов в склонении, а разность между вычисленным и наблюденным направлением полной силы, которая для этого места составляет всего $11^\circ 5'$.

таться хорошей заменой. Этим, однако, не отрицается возможность получения хорошего согласия при *большем* числе таких фиктивных магнитов, но появляется совершенно иной вопрос: можно ли посоветовать такой вид решения? В самом деле, вычисления, столь трудные уже при двух магнитах, представили бы при *большем* их числе совершенно непреодолимые трудности. Лучше всего будет совершенно оставить этот путь, который невольно напоминает представление движения планет при помощи все большего числа эпициклов^[2].

В этой статье я разовью общую теорию земного магнетизма независимо от какой бы то ни было гипотезы о распределении магнитной жидкости в Земле и вместе с тем сообщу результаты, к которым я пришел при первом применении этого метода. Как ни несовершенны эти результаты, они могут дать представление о том, что можно ожидать в будущем, если подвергнуть более точной и повторной обработке надежные и полные наблюдения во всех местах земной поверхности.

§ 1

Сила, действующая в каждой точке земной поверхности на магнитную стрелку, подвешенную за ее центр тяжести, сообщает ей вполне определенное направление, если предположить устраненной всякую внешнюю причину, могущую действовать на стрелку (как, например, близость к стрелке другого магнита или проводника гальванического тока); эта сила называется *земною магнитною силою*, т. к. причину ее происхождения можно искать лишь в самой Земле. Неизвестно, однако, не происходят ли правильные и неправильные часовые изменения этой силы от причин, лежащих вне Земли, и надо надеяться, что общее внимание естествоиспытателей, направленное теперь на эти явления, доставит в будущем достаточные сведения^[3]; не надо лишь забывать, что эти изменения сравнительно весьма малы и что гораздо

более значительная и постоянно действующая сила происходит от самой Земли. С этим тотчас же связывается следствие, что данные, служащие для исследования этой главной силы, должны быть предварительно освобождены от упомянутых аномальных изменений, что можно сделать, взяв средние значения из многочисленных и длительных наблюдений; до тех пор, пока такие чистые результаты не имеются для большого числа точек, распределенных по всей поверхности Земли, лучшее, что может быть получено, есть приближение, при котором можно пренебречь разностями, имеющими порядок упомянутых аномалий.

§ 2

Основанием нашего исследования служит предположение, что земная магнитная сила есть совокупное действие всех намагниченных частей Земли. Намагничивание мы представляем себе как разделение магнитных жидкостей; если такое представление принято, то действие этих жидкостей (отталкивание или притяжение одноименных или разноименных обратно пропорционально квадрату расстояния) принадлежит к установленным физическим истинам. Замена этого представления представлением Ампера, по которому с устранением магнитных жидкостей магнетизм состоит в постоянных гальванических токах в малейших частицах тела, не внесло бы в результаты никаких изменений. Это остается справедливым и для того случая, если бы земной магнетизм хотели приписать смешанной причине, так что он обуславливался бы отчасти разделением магнитных жидкостей в Земле, отчасти гальваническими токами в ней, причем, как известно, действие каждого такого гальванического тока можно заменить определенным распределением магнитных жидкостей по поверхности, ограниченной линией тока, так что в любой точке внешнего пространства магнитное действие этого распределения будет совершенно таким же, как от гальванического тока.

§ 3

Для измерения магнитной жидкости мы принимаем, так же как в работе „*Intensitas vis magneticae*“ за единицу положительного магнетизма то количество северной жидкости, которое, действуя на такое же количество той же жидкости на расстоянии, равном единице, производит движущую силу, принятую за единицу. Когда мы говорим о магнитной силе, которая в некоторой точке пространства проявляется как действие магнитной жидкости, где бы то ни было находящейся, то под этим надо разуместь движущую силу, которая в этом месте действует на единицу положительной магнитной жидкости. В этом смысле производит, следовательно, сосредоточенная в некоторой точке магнитная жидкость μ на расстоянии ρ силу $\frac{\mu}{\rho^2}$ и притом отталкивающую или притягивающую по направлению прямой ρ , смотря по тому, μ положительно или отрицательно. Если обозначить через a, b, c координаты μ относительно трех взаимно перпендикулярных осей, через x, y, z координаты той точки, где действует сила, так что

$$\rho = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2},$$

и если разложить силу параллельно осям координат, то составляющие будут:

$$\frac{\mu(x-a)}{\rho^3}; \quad \frac{\mu(y-b)}{\rho^3}; \quad \frac{\mu(z-c)}{\rho^3},$$

которые, как легко видеть, равны частным производным от $-\frac{\mu}{\rho}$ по x, y, z .

Если кроме μ действуют еще другие частицы магнитной жидкости μ', μ'', μ''' и т. д., сосредоточенные в точках, лежащих соответственно на расстояниях ρ', ρ'', ρ''' и т. д. от места действия, то составляющие равнодействующей магнитной силы, параллельные осям координат, будут равны частным

производным от функции $— \left(\frac{\mu}{\rho} + \frac{\mu'}{\rho'} + \frac{\mu''}{\rho''} + \frac{\mu'''}{\rho'''} + \dots \right)$
по переменным x, y, z .

§ 4

Отсюда легко видеть, какую магнитную силу произведет Земля в любой точке пространства, как бы ни были в ней распределены магнитные жидкости. Надо вообразить, что весь объем Земли, поскольку он содержит свободный магнетизм, т. е. разделенные магнитные жидкости, подразделен на бесконечно малые элементы и что в каждом элементе содержится количество свободного магнетизма $d\mu$, причем южный всегда рассматривается как отрицательный; обозначим затем через ρ расстояние от $d\mu$ до произвольной точки пространства, прямоугольные координаты которой x, y, z , и, наконец, через V — взятую с обратным знаком сумму $\frac{d\mu}{\rho}$, распространенную на все частицы Земли; иначе пусть

$$V = - \int \frac{d\mu}{\rho}.$$

Таким образом, для каждой точки пространства V имеет определенное значение, т. е. это есть некоторая функция от x, y, z или каких-либо других трех переменных, с помощью которых различаются точки пространства. Магнитная сила ψ в каждой точке пространства и ее составляющие ξ, η, ζ , происходящие от разложения ψ параллельно осям координат, находятся по формулам:

$$\xi = \frac{\partial V}{\partial x}; \quad \eta = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad \zeta = \frac{\partial V}{\partial z}; \quad \psi = V \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}.$$

§ 5

Прежде всего надо вывести некоторые общие предложения, не зависящие от вида функции V , которые замечательны по своей простоте и изяществу.

Полный дифференциал от V есть:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = \xi dx + \eta dy + \zeta dz.$$

Если обозначить через ds расстояние между двумя точками, к которым относятся значения V и $V + dV$, и через θ угол, составляемый направлением магнитной силы ψ с ds , то будет

$$dV = \psi \cos \theta ds,$$

ибо $\frac{\xi}{\psi}$, $\frac{\eta}{\psi}$, $\frac{\zeta}{\psi}$ равны косинусам углов, составляемых ψ с осями координат; вместе с тем $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ суть косинусы углов между ds и теми же осями, следовательно $\frac{dV}{ds}$ равно проекции силы на направление ds ; это, между прочим, следует и из равенства $\frac{\partial V}{\partial x} = \xi$, если вспомнить, что оси координат можно брать произвольно.

§ 6

Если две точки пространства P^0 и P' соединить любой линией, произвольный элемент которой есть ds , и обозначить через θ угол между ds и направлением магнитной силы ψ , то будет:

$$\int \psi \cos \theta ds = V' - V^0,$$

если интегрирование распространить по всей линии и обозначить через V^0 и V' значения V в конечных точках ее.

Следующие следствия этого плодотворного предложения заслуживают здесь особого упоминания:

I. Интеграл $\int \psi \cos \theta ds$ сохраняет одно и то же значение, независимо от пути из P^0 и P' .

II. Интеграл $\int \psi \cos \theta ds$, взятый по любой замкнутой линии, всегда равен нулю.

III. На замкнутой линии, если только θ не равно 90° , на одной части значения θ меньше, на другой больше 90° .

§ 7

Поверхность, на которой во всех точках $V = V^0$, причем V^0 имеет заданное значение, разграничивает пространство так, что в одной его части V больше V^0 , в другой V меньше V^0 .¹ Из предложения § 5 легко видеть, что магнитная сила в каждой точке этой поверхности к ней перпендикулярна и направлена притом в такую сторону, где находятся большие значения V . Если ds есть бесконечно малая линия, перпендикулярная к поверхности, и $V^0 + dV^0$ — значение V на другом конце этой линии, то напряженность магнитной силы будет $\frac{dV^0}{ds}$. Совокупность точек, для которых $V = V^0 + dV^0$, представляет вторую поверхность, бесконечно близкую к первой, и в различных местах промежуточного пространства напряженность магнитной силы обратно пропорциональна расстоянию между обоими поверхностями. Если заставить V изменяться через бесконечно малые, но равные участки, то получится система поверхностей, разделяющих пространство на бесконечно тонкие слои, и обратная пропорциональность толщины слоев магнитной силе относится тогда не только к различным местам одного слоя, но и к различным слоям.

§ 8

Мы рассмотрим распределение значений V по поверхности земли.

¹ Если бы функция V могла принимать любой вид, то в особенных случаях V могло бы быть максимум или минимум в отдельных точках или отдельных линиях, кругом которых лежали бы или большие или меньшие значения, или даже такая поверхность, на обеих сторонах которой лежали бы одновременно большие и меньшие значения. Но те условия, которым подчинена функция V , не допускают таких исключительных случаев. обстоятельное рассмотрение этого вопроса, который к настоящей нашей цели не относится, должно быть отложено до другого случая.

Пусть P есть точка земной поверхности, ψ — полная напряженность, PM — направление полной силы, ω — горизонтальная напряженность, PN — направление проекции силы на горизонтальную плоскость, иначе PN есть направление магнитного меридиана от южного полюса магнитной стрелки к северному, i — угол между PM и PN , т. е. наклонение; θ и t — углы между элементом ds линии, лежащей на земной поверхности и направлениями PM и PN , наконец, V и $V + dV$ соответствуют началу и концу ds [4]; следовательно, будет:

$$\cos \theta = \cos i \cos t; \quad \omega = \psi \cos i;$$

уравнение § 5 обращается в такое:

$$dV = \omega \cos t ds.$$

Поэтому, если P^0 и P' суть точки поверхности земли, в которых V имеет значения V^0 и V' , и эти точки соединены линией, лежащей целиком на земной поверхности, для которой ds есть произвольный элемент, то будет:

$$\int \omega \cos t ds = V' - V^0,$$

причем интегрирование распространяется по всей линии.

Очевидно, что и здесь имеют место три следствия, совершенно подобные следствиям § 6, именно:

I. Интеграл $\int \omega \cos t ds$ сохраняет свое значение, независимо от пути интегрирования от P^0 до P' .

II. Интеграл $\int \omega \cos t ds$ равен нулю, если его взять по всей замкнутой линии, лежащей на поверхности земли.

III. Для такой линии должно быть непременно, если только не везде угол $t = 90^\circ$, для одной части угол t острый, для другой угол t тупой.

§ 9

Предложения I и II предыдущего параграфа (которые, собственно, суть различные выражения одного и того же) могут быть приближенно проверены по действительным наблюдениям.

Пусть $P^0, P', P'', \dots, P^0$ есть полигон на поверхности земли, причем стороны его суть кратчайшие линии между их концами, т. е. дуги больших кругов, если принять Землю за шар. Пусть $\omega^0, \omega', \omega''$ и т. д. — интенсивности горизонтальной магнитной силы в точках P^0, P', P'' , и т. д., затем $\delta^0, \delta', \delta''$ и т. д. — склонения, которые будем считать от севера к западу положительными и к востоку отрицательными, наконец, пусть $(0,1)$ есть азимут линии $P^0 P'$ в точке P^0 и притом считаеый от юга к западу, точно так же пусть $(1,0)$ есть азимут той же линии, взятый обратно в P' , и т. д.

Надо заметить, что t по каждой стороне полигона изменяется непрерывно, в углах же скачками и, значит, имеет в них два различных значения, например в точке P' t имеет значения: $(1,0) + \delta'$, поскольку P' есть конец стороны $P^0 P'$ [5], и $180^\circ + (1,2) + \delta'$, поскольку P' есть начало $P' P''$.

Для интеграла $\int \omega \cos t ds$, взятого по $P^0 P'$, можно взять приближенное значение:

$$\frac{1}{2} (\omega^0 \cos t^0 + \omega' \cos t') P^0 P',$$

где t^0 и t' суть значения t в P^0 как в начальной точке $P^0 P'$ и t' как в конечной точке $P^0 P'$; это приближение есть все, что может быть получено, если значения ω и t даны в конечных точках P^0 и P' , и эта величина тем надежнее, чем длина $P^0 P'$ меньше. При наших обозначениях это выражение будет:

$$\frac{1}{2} [\omega' \cos ((1,0) + \delta') - \omega^0 \cos ((0,1) + \delta^0)] P^0 P'.$$

Подобным же образом значение интеграла, взятого по $P' P''$, будет:

$$\frac{1}{2} [\omega'' \cos ((2,1) + \delta'') - \omega' \cos ((1,2) + \delta')] P' P''$$

и т. д. для всего полигона.

Для треугольника наша формула дает приближенное равенство:

$$\begin{aligned} & \omega^0 [P^0 P' \cos((0,1) + \delta^0) - P^0 P'' \cos((0,2) + \delta^0)] + \\ & + \omega' [P' P'' \cos((1,2) + \delta') - P^0 P' \cos((1,0) + \delta')] + \\ & + \omega'' [P^0 P'' \cos((2,0) + \delta'') - P' P'' \cos((2,1) + \delta'')] = 0 \end{aligned}$$

Очевидно, что в этом уравнении единицы для напряженностей и расстояний произвольны.

§ 10

Для примера применим эти формулы к магнитным элементам:

Геттинген ...	$\delta^0 = 18^\circ 38'$	$i^0 = 67^\circ 56'$	$\psi^0 = 1.357$;
Милан	$\delta' = 18 \ 33$	$i' = 63 \ 49$	$\psi' = 1.294$;
Париж	$\delta'' = 22 \ 04$	$i'' = 67 \ 24$	$\psi'' = 1.348$.

Отсюда имеем:

$$\omega^0 = 0.50980; \quad \omega' = 0.57094; \quad \omega'' = 0.51804[^6].$$

Географические координаты этих точек суть:

	Широта	Долгота
Геттинген ...	$51^\circ 32'$	$9^\circ 58'$ от Гринича
Милан	$45 \ 28$	$9 \ 09$ от Гринича
Париж	$48 \ 52$	$2 \ 21$ от Гринича

Тогда, производя вычисление лишь для поверхности шара, имеем:

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} (0,1) &= 5^\circ 11' 31'' \\ (1,0) &= 184 \ 35 \ 35 \\ (1,2) &= 128 \ 47 \ 31 \\ (2,1) &= 303 \ 48 \ 01 \\ (2,0) &= 238 \ 20 \ 20 \\ (0,2) &= 64 \ 10 \ 12 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & P^0 P' = 6^\circ 05' 20'' \\ & P' P'' = 5 \ 44 \ 06 \\ & P^0 P'' = 5 \ 32 \ 04 \end{aligned} \end{aligned}$$

Подставив эти значения, а также значения $\delta^0, \delta', \delta''$ в наше уравнение, выразив расстояния в секундах, получим:

$$0 = 17\,556 \omega^0 + 2774 \omega' - 20\,377 \omega'',$$

иначе,

$$\omega'' = 0.86158 \omega^0 + 0.13613 \omega'.$$

По наблюдаемым горизонтальным напряженностям в Геттингене и Милане имеем для Парижа:

$$\omega'' = 0.51696,$$

что почти в точности совпадает с наблюдаемым значением

$$0.51804[7].$$

Впрочем, легко видеть, что если позволить себе вместо расстояния $P^0 P'$ и т. д. взять их синусы, то вышеприведенная формула будет непосредственно выражаться через географические координаты мест.

§ 11

Линия на поверхности земли, во всех точках которой V имеет одинаковое определенное значение V^0 , отделяет, вообще говоря, те части поверхности, где V имеет значение больше, чем V^0 , от тех, где оно меньше. Горизонтальная магнитная сила в каждой точке этой линии, очевидно, нормальна к линии и направлена в ту сторону, по которую значения V больше. Если ds есть бесконечно малый участок в этом направлении, и $V^0 + dV^0$ есть значение V на другом конце этого участка, то $\frac{dV^0}{ds}$ есть интенсивность горизонтальной магнитной силы в этом месте. Подобно первому случаю, совокупность точек, соответствующих значению $V = V^0 + dV^0$, образует вторую линию, бесконечно близкую первой, и, следовательно, выделяет на поверхности земли зону, внутри которой значения V лежат между V^0 и $V^0 + dV^0$ и где горизонтальная напряженность обратно пропорциональна ширине зоны; таким образом, если V изменять через бесконечно малые, но равные ступени от наибольшего до наименьшего значения по поверхности земли, то вся эта поверхность будет подразде-

лена на бесконечно большое число бесконечно узких зон, в границах которых в каждом месте горизонтальная магнитная сила нормальна, и ее интенсивность обратно пропорциональна ширине зоны в этом месте.

Обоим крайним значениям V здесь соответствуют две точки, ограниченные зонами; в этих точках горизонтальная сила равна нулю, так что в этих точках полная магнитная сила вертикальна. Эти точки называются *магнитными полюсами Земли*.

Граничные линии зон суть не что иное, как пересечения рассмотренных в § 7 поверхностей с поверхностью земли; в полюсах же имеет место лишь касание.

§ 12

Описанный в предыдущем пункте вид системы линий представляет собственно лишь простейший их тип, который может дать ряд изменений, если только надо было бы рассматривать всякое возможное распределение магнетизма. Но здесь мы не будем исчерпывать этот предмет, а приведем лишь некоторые замечания об исключительных случаях, ибо при *действительном* магнитном состоянии Земли система линий на ее поверхности не представляет значительных исключений, и, в крайнем случае, искажения там и здесь являются просто местными.

Некоторые физики выразили мнение, что Земля имеет два магнитных северных полюса и два южных; однако сначала нужно дать *точное* определение понятия, что должно разуметь под магнитным полюсом. Мы будем пользоваться этим названием для всякой точки земной поверхности, где горизонтальная напряженность равна нулю, т. е. где, вообще говоря, наклонение 90° ; сюда надо включить и тот особенный случай (если только он встречается), когда полная напряженность равна нулю. Но если бы пожелали называть магнитными полюсами те места, где полная напряженность

имеет наибольшее значение, т. е. значение больше, нежели кругом в ближайшем соседстве, то надо было бы помнить при этом, что такое определение представляет нечто совершенно особенное от первого и что последние точки не имеют обязательной связи с первыми ни по своему расположению, ни по своему числу, и что обозначение разных вещей одним и тем же именем ведет к путанице.

Отрешившись от истинных свойств Земли и рассматривая вопрос вообще, всегда можно допустить, что могут существовать более нежели два магнитных полюса; но, как кажется, еще не было замечено, что если, например, существуют два северных полюса, то между ними есть еще третья точка, которая тоже является магнитным полюсом, но собственно ни северным, ни южным, а, если угодно, одновременно и тем и другим.

Для разъяснения этого обстоятельства ничто не может служить лучше, как рассмотрение системы наших линий.

Если функция V в некоторой точке земной поверхности P^* имеет наибольшее значение V^* , т. е. кругом ее меньшие значения, то ряду последовательно убывающих значений будет соответствовать система кольцевых линий, из которых каждая включает все предыдущие, а также точку P^* , и направление горизонтальной магнитной силы или силы, действующей на северный полюс магнитной стрелки, по каждой из этих кольцевых линий идет внутрь,¹ — это есть характерный признак магнитного северного полюса.² Очевидно, что

¹ Эти кольцевые линии должны быть принимаемы за бесконечно малые и они не суть непременно окружности, а, вообще говоря, эллипсы, вследствие чего направление к ним по нормали не проходит через P^* , за исключением четырех точек на каждом кольце. Поэтому можно сделать большую ошибку, если принять пересечение двух компасных пеленгов, взятых при значительных между ними расстояниях, за место P^* без всякой оговорки.

² Здесь мы пользуемся обычными выражениями, согласно которым придают это название точке, найденной капитаном Россом, хотя, собственно говоря, это есть южный полюс, если рассматривать Землю как магнит.

кольца могут быть взяты столь малыми или соответствующими им значения V столь мало отличающимися от V^* , что всякая иная заданная точка остается снаружи системы колец.

Мы обозначим через S совокупность всех точек земной поверхности, в которых значение V больше заданной величины W . Очевидно, что S будет образовывать или одну сплошную область поверхности, или несколько отделенных друг от друга областей, и на граничной линии или граничных линиях, отделяющих такие области от прочих мест, где V меньше W , будет $V = W$. Если изменять W в сторону уменьшения или увеличения, то такая область поверхности уменьшается или увеличивается.

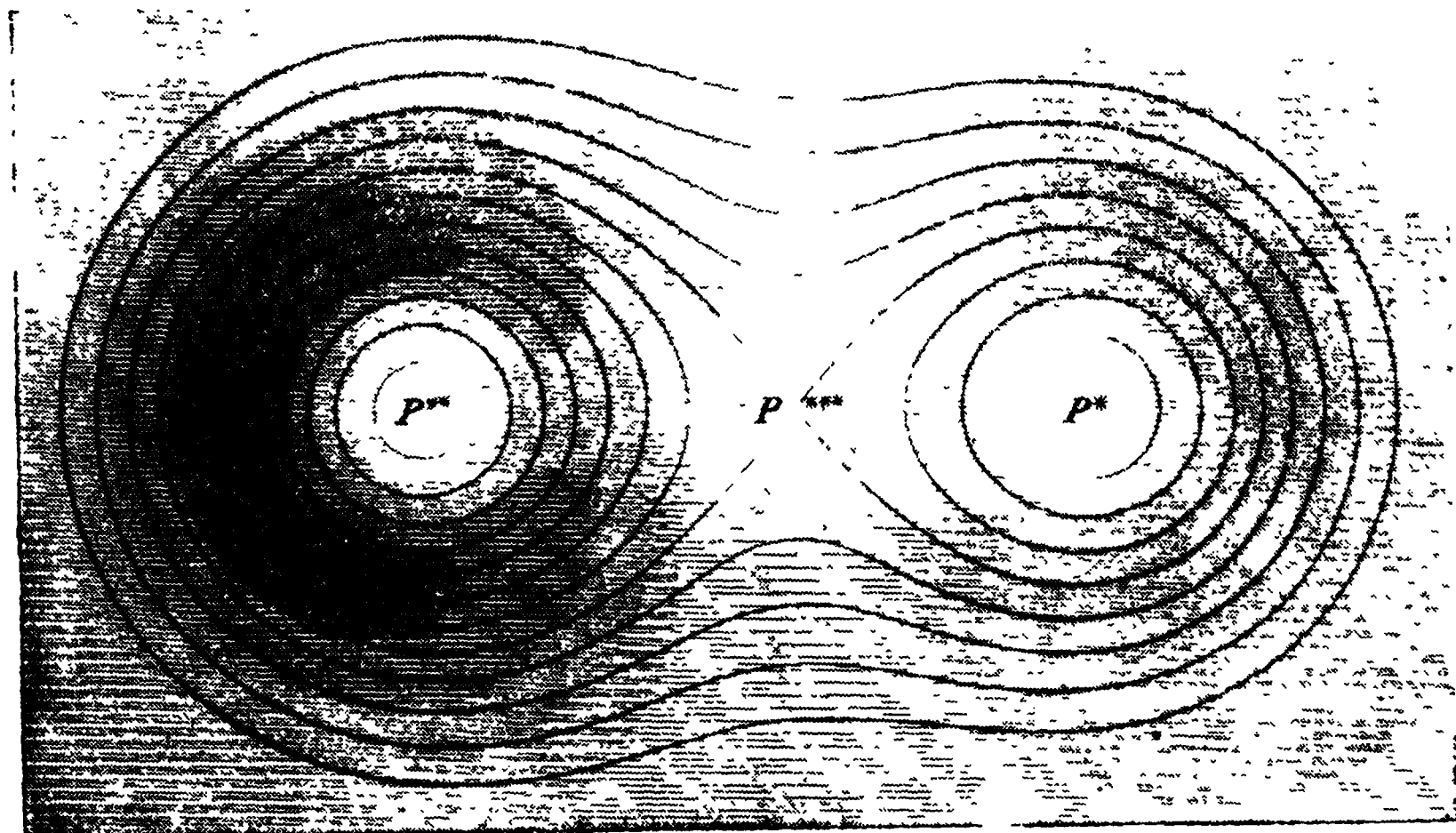
Допустим теперь, что P^{**} есть вторая точка подобного же рода, как P^* , т. е. что и в этой точке V имеет максимальное значение V^{**} . Но так как на основании сказанного выше можно взять за W значение меньшее, нежели V^* , и столь мало от него отличающееся, что P^{**} будет находиться вне той области S , в которой находится P^* , то, если заранее предположить, что V^{**} не меньше V^* (что всегда возможно) и вместе с тем больше W , P^{**} тоже обязательно будет лежать в некоторой области S , т. е. P^* и P^{**} лежат оба в S , но в разных областях поверхности S .

Очевидно, что W может быть также взято настолько малым, что P^* и P^{**} будут лежать в одном куске поверхности S , ибо если только W взять достаточно малым, то S может охватить всю земную поверхность.

Если теперь заставить W пробегать последовательно все значения от первого до второго, то найдется такое последнее V^{***} , для которого P^* и P^{**} будут лежать еще в разделенных кусках S , но которые сольются в один кусок, как только W будет взято еще меньше.

Если это слияние происходит в точке P^{***} , то граничная линия, на которой $V = V^{***}$, имеет вид восьмерки, которая самое себя пересекает в этой точке, и нетрудно убедиться, что в этой точке горизонтальная напряженность должна быть

равна нулю. В самом деле, это пересечение происходит или под конечным углом или под бесконечно малым углом. В первом случае горизонтальная сила, если она не нуль, должна бы быть нормальной к двум различным касательным, что нелепо; во втором случае, когда обе половинки восьмерки касаются друг друга в точке P^{***} , имея в ней общую касательную,



Фиг. 1.

тельную, сила, нормальная к этой касательной, должна бы быть направлена внутрь одной половинки восьмерки, в чем заключается противоречие, ибо значение V возрастает в обе стороны; таким образом, P^{***} , согласно нашему определению, есть настоящий магнитный полюс, но такой полюс, который по отношению к смежным точкам, лежащим внутри обоих растворов восьмерки, должен рассматриваться как южный, по отношению же к лежащим снаружи — как северный. Пояснением такого вида системы линий может служить фиг. 1.

Если слияние произойдет в двух различных местах, то для них будет справедливо то же самое, что доказано отно-

сительно одной точки, и нетрудно видеть, что тогда внутри пространства, заключающего P^* и P^{**} , образуется область, подобная острову, которая при дальнейшем убывании W все время суживается и наконец обращается в истинный южный полюс.

Подобное этому будет и в том случае, когда слияние происходит одновременно в трех и большем числе отдельных точек; если же оно происходит разом по целой линии, то горизонтальная сила должна исчезать во всех точках этой линии.

Впрочем, само собою ясно, что предположение о наличии двух южных полюсов одновременно обуславливает существование третьей точки, которая не будет ни южным, ни северным полюсом, или будет скорее обоими вместе.

§ 13

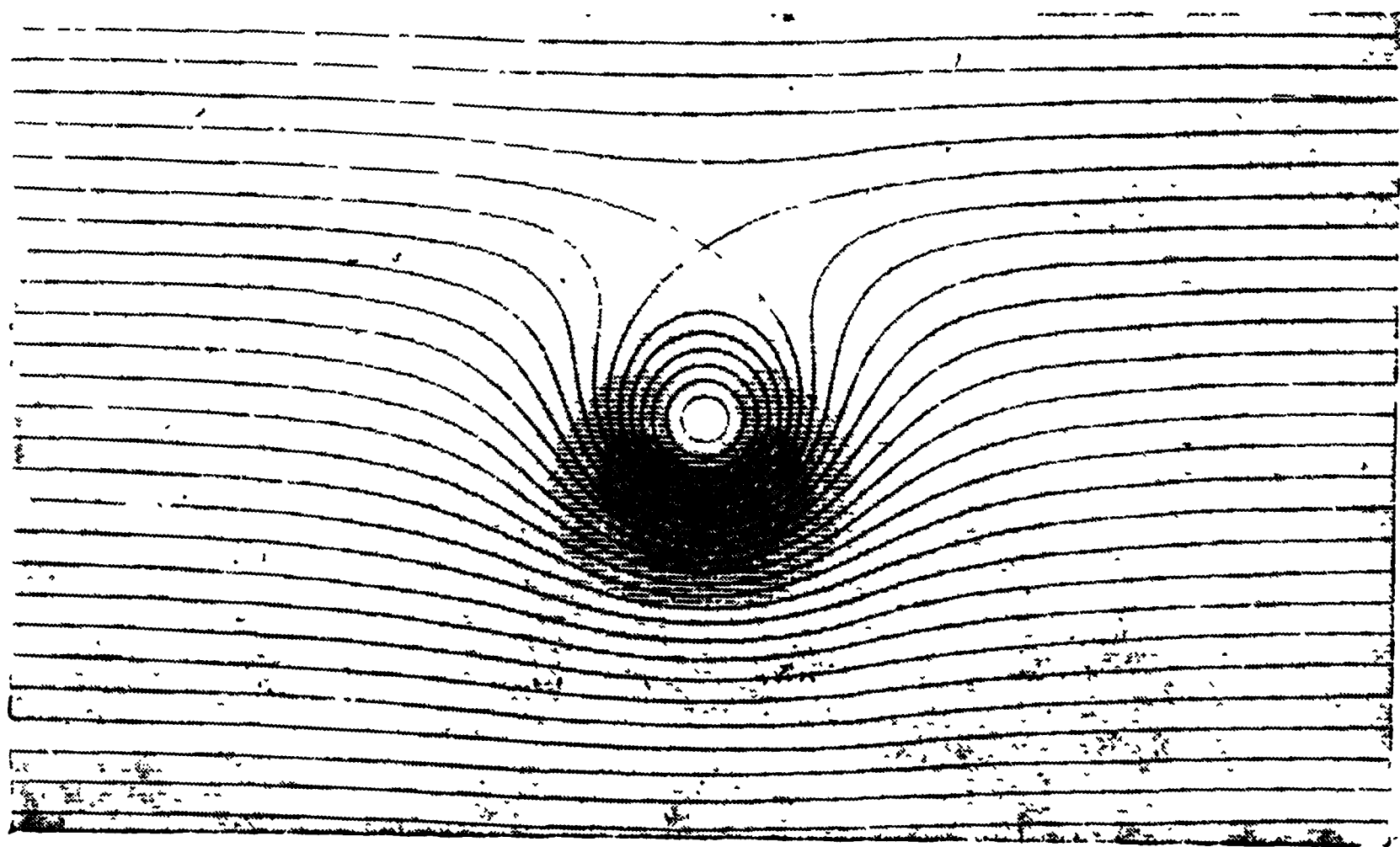
Из изложенного в предыдущем параграфе легко видеть, как будет обстоять дело с некоторыми возможными исключениями из простейшей системы наших линий. Совокупность точек, которым соответствует определенное значение V , может представлять линию, состоящую из отдельных кусков, каждый из которых является замкнутым и отделенным от других; это может быть линия, которая самое себя пересекает; наконец, это может быть такая линия, к которой прилегают с обеих сторон области, где V больше, нежели на самой линии или где V с обеих сторон меньше.

Можно утверждать, что значительных отклонений подобного рода на Земле нет. Но местные отклонения весьма возможны там, где на небольшой глубине находятся магнитные массы, которые на мало-мальски значительном расстоянии не оказывают заметного действия, а в непосредственной близости оказывают настолько сильное действие, что правильное изменение земной магнитной силы совершенно искажается и становится незаметным. В простейшем случае

система линий в таком месте имела бы вид, представленный наглядно на фиг. 2 [8].

§ 14

После этого геометрического представления о распределении горизонтальной магнитной силы мы перейдем к изложению способа ее вычисления. На поверхности земли V пе-



Фиг. 2.

реходит в простую функцию двух переменных, за которые мы примем географическую долготу, считаемую к востоку от произвольного первого меридиана, и расстояние от северного полюса; первую мы обозначим через λ , вторую, т. е. дополнение географической широты, через u . Если рассматривать Землю как произведенную вращением эллипса, большая полуось которого равна R , малая равна $(1-\epsilon)R$, около этой последней, то величина элемента меридиана будет:

$$\frac{(1-\epsilon)^2 R du}{[1-(2\epsilon-\epsilon^2)\cos^2 u]^{\frac{3}{2}}}$$

и элемента параллели:

$$\frac{R \sin u d\lambda}{\sqrt{1 - (2\epsilon - \epsilon^2) \cos^2 u}}.$$

Если горизонтальную магнитную силу разложить на две составляющие X по направлению меридиана и Y перпендикулярно к нему и рассматривать X как положительное к северу и Y — к западу, то будет:

$$X = - \frac{[1 - (2\epsilon - \epsilon^2) \cos^2 u]^{\frac{3}{2}}}{(1 - \epsilon^2)} \frac{\partial V}{R \partial u},$$

$$Y = - \sqrt{1 - (2\epsilon - \epsilon^2) \cos^2 u} \frac{1}{R \sin u} \frac{\partial V}{\partial \lambda}.$$

Тогда полная сила будет:

$$\sqrt{X^2 + Y^2},$$

и тангенс склонения:

$$\frac{Y}{X}.$$

Если пренебречь квадратом сжатия ϵ , то эти выражения будут:

$$X = - [1 + (2 - 3 \cos^2 u)] \epsilon \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial u},$$

$$Y = - [1 - \epsilon \cos^2 u] \frac{1}{R \sin u} \frac{\partial V}{\partial \lambda},$$

или, если совершенно отбросить сжатие:

$$X = - \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial u}, \quad Y = - \frac{1}{R \sin u} \frac{\partial V}{\partial \lambda}.$$

Имеющиеся в настоящее время наблюдаемые данные оставляют желать многого и большей частью слишком грубы, чтобы уже теперь стоило считать Землю за эллипсоид, что само по себе не представило бы затруднений, но без всякой пользы весьма повредило бы простоте выкладок^[9]. Мы поэтому остановимся на последних формулах, причем будем рассматривать Землю как шар, радиус которого равен R .

§ 15

Если X будет выражено через заданную функцию от u и λ , то отсюда может быть выведено Y a priori. Положим $\int_0^u X du = T$, причем при интегрировании λ рассматривается как постоянная; очевидно, что, дифференцируя по переменной u количество $V + RT$, мы получим $\frac{\partial (V + RT)}{\partial u} = 0$, т. е. $V + RT$ есть величина, не зависящая от u , или, что то же, во всех точках меридиана это есть величина постоянная; вместе с тем эта величина должна быть абсолютно постоянная, ибо все меридианы пересекаются в полюсах. Положив значение V в северном полюсе равным V^* , будем иметь:

$$T = \frac{V^* - V}{R}$$

и, следовательно,

$$Y = -\frac{dT}{\sin u d\lambda}.$$

Этот результат можно выразить и так:

$$Y = \frac{1}{\sin u} \int_0^u \frac{\partial Y}{\partial \lambda} du.$$

§ 16

Это замечательное предложение, что если направленная на север составляющая горизонтальной магнитной силы дана для всей земной поверхности, то составляющая, направленная на запад (или на восток), следует отсюда непосредственно, таково, что обратное ему справедливо только с некоторым изменением. Именно, если Y выразить через заданную функцию u и λ и если обозначить через U неопределенный интеграл $U = \int \sin u Y d\lambda$, причем при интегрировании u считается постоянным, то будет:

$$\frac{\partial (V + RU)}{\partial \lambda} = 0,$$

т. е. величина $V + RU$ не зависит от λ , т. е., вообще говоря, величина $V + RU$ есть функция только переменной u . Значит, и количество

$$\frac{\partial (V + RU)}{R \partial u} = \frac{\partial U}{\partial u} - X$$

есть та же функция одной переменной u , т. е. формула $\frac{\partial U}{\partial u}$ дает не полное выражение X , причем член, зависящий только от u , остается неопределенным. Но этот недостаток может быть устранен, если кроме выражения для U известно выражение для X по определенному меридиану, или, еще общее, по любой линии, идущей от северного полюса до южного. Таким образом видно, что если для всей поверхности земли известна составляющая горизонтальной магнитной силы, направленная на запад, и составляющая, направленная на север в любой точке линии, проведенной от северного полюса к южному, то составляющая по меридиану для всей земной поверхности следует отсюда непосредственно.

§ 17

Предыдущие исследования относятся только к горизонтальной слагающей магнитной силы Земли; чтобы охватить также и вертикальную слагающую, необходимо поставить задачу в ее общем виде, т. е. рассматривать V как функцию трех переменных величин, которыми определяется место любой точки O в пространстве. Мы избираем для этого расстояние r от центра Земли, угол u , образуемый r с северною частью земной оси, и угол λ между плоскостью, проведенной через r и ось Земли, и любым постоянным меридианом, причем λ считается положительным к востоку.

Пусть V разложена в ряд по убывающим степеням; этому ряду мы придаем следующий вид:

$$V = \frac{R^2}{r} P^0 + \frac{R^3 P'}{r^2} + \frac{R^4}{r^3} P'' + \frac{R^5}{r^4} P''' + \dots$$

Коэффициенты $P^0, P', P'' \dots$ здесь функции от u и λ ; чтобы видеть, как они зависят от распределения магнитной жидкости внутри Земли, обозначим $d\mu$ элемент этой жидкости, ρ — его расстояние до точки O , и пусть r^0, u^0, λ^0 обозначают то же самое, как r, u, λ для O [10]; таким образом, будет:

$$V = - \int \frac{d\mu}{\rho}$$

и

$$\rho = \sqrt{r^2 - 2rr^0 [\cos u \cos u^0 + \sin u \sin u^0 \cos(\lambda - \lambda^0)] + r^{02}},$$

и если $\frac{1}{\rho}$ разложить в ряд

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r} \left(T^0 + T' \frac{r^0}{r} + T'' \frac{r^{02}}{r^2} + \dots \right),$$

то будет:

$$R^2 P^0 = - \int T^0 d\mu; \quad R^3 P' = - \int T' r^0 d\mu; \quad R^4 P'' = - \int T'' r^{02} d\mu \dots$$

Так как $T^0 = 1$, и по основному предположению, что количества положительного и отрицательного магнетизма в каждой измеримой частице, а значит и во всей Земле, между собою равны, т. е. $\int d\mu = 0$, значит $P^0 = 0$, т. е. первый член нашего ряда пропадает.

Затем видно, что P' имеет вид:

$$R^3 P' = \alpha \cos u + \beta \sin u \cos \lambda + \gamma \sin u \sin \lambda,$$

причем

$$\alpha = - \int r^0 \cos u^0 d\mu; \quad \beta = - \int r^0 \sin u^0 \cos \lambda^0 d\mu;$$

$$\gamma = - \int r^0 \sin u^0 \sin \lambda^0 d\mu;$$

таким образом, $-\alpha, -\beta, -\gamma$, по формулам § 5 „*Intensitas vis magneticae*“, — магнитные моменты относительно трех прямоугольных осей, из которых первая есть земная ось, вто-

рая и третья — радиусы экватора, идущие в точки, долготы которых равны 0 и 90° .

Мы можем предположить, что все коэффициенты ряда для $\frac{1}{\rho}$ выражаются известными формулами; для нашей цели достаточно заметить, что относительно u и λ коэффициенты представляют собой целые рациональные функции от $\cos u$, $\sin u \cos \lambda$, $\sin u \sin \lambda$, притом T'' второй степени, T''' третьей и т. д. Это же относится и к коэффициентам функций P'' , P''' и т. д.

Ряды для $\frac{1}{\rho}$ и для V сходятся, пока r не меньше R , или, лучше, не меньше, чем радиус шара, заключающего все магнитные частицы Земли.

§ 18

Функция V , имеющая вид $V = - \int \frac{d\mu}{\rho}$, удовлетворяет следующему уравнению в частных производных:

$$0 = r \frac{\partial^2 (rV)}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + \operatorname{ctg} u \frac{\partial V}{\partial u} + \frac{1}{\sin^2 u} \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2},$$

которое представляет собой не что иное, как преобразование известного уравнения

$$0 = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2},$$

причем x , y , z — прямоугольные координаты точки O . Если подставить в первое уравнение выражение

$$V = \frac{R^3}{r^2} P' + \frac{R^4}{r^3} P'' + \frac{R^5}{r^4} P''' + \dots,$$

то станет ясным, что коэффициенты P' , P'' , $P''' \dots$ удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$0 = n(n+1)P^n + \frac{\partial^2 P^n}{\partial u^2} + \operatorname{ctg} u \frac{\partial P^n}{\partial u} + \frac{1}{\sin^2 u} \frac{\partial^2 P^n}{\partial \lambda^2}.$$

Из этого уравнения, в связи с замечанием предыдущего пункта, следует общий вид функции P^n , а именно: если обозначить через $P^{n,m}$ следующую функцию u :

$$P^{n,m} = \left[\cos^{n-m} u - \frac{(n-m)(n-m-1)}{2(2n-1)} \cos^{n-m-2} u + \right. \\ \left. + \frac{(n-m)(n-m-1)(n-m-2)(n-m-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} \cos^{n-m-4} u - \dots \right] \sin^m u,$$

то P^n представляется суммой $(2n+1)$ членов; именно:

$$P^n = g^{n,0} P^{n,0} + (g^{n,1} \cos \lambda + h^{n,1} \sin \lambda) P^{n,1} + (g^{n,2} \cos 2\lambda + \\ + h^{n,2} \sin 2\lambda) P^{n,2} + \dots + (g^{n,n} \cos n\lambda + h^{n,n} \sin n\lambda) P^{n,n},$$

причем $g^{n,0}, g^{n,1}, \dots, h^{n,1}, g^{n,2}$, и т. д. — определенные численные коэффициенты [11].

§ 19

Если действующую в точке O магнитную силу разложить на три взаимно перпендикулярные составляющие X, Y, Z , из которых последняя направлена к центру Земли так, что X и Y касаются шаровой поверхности, проведенной через точку O концентрически с Землей, и притом составляющая X лежит в плоскости, проведенной через ось Земли и точку O , и направлена к северу, составляющая Y — параллельно земному экватору к западу, то будет:

$$X = -\frac{\partial V}{r \partial u}; \quad Y = -\frac{\partial V}{r \sin u \partial \lambda}; \quad Z = -\frac{\partial V}{\partial r};$$

следовательно,

$$X = -\frac{R^3}{r^3} \left(\frac{\partial P'}{\partial u} + \frac{R}{r} \frac{\partial P''}{\partial u} + \frac{R^2}{r^2} \frac{\partial P'''}{\partial u} + \dots \right), \\ Y = -\frac{R^3}{r^3 \sin u} \left(\frac{\partial P'}{\partial \lambda} + \frac{R}{r} \frac{\partial P''}{\partial \lambda} + \frac{R^2}{r^2} \frac{\partial P'''}{\partial \lambda} + \dots \right), \\ Z = \frac{R^3}{r^3} \left(2P' + \frac{3R}{r} P'' + \frac{4R^2}{r^2} P''' + \dots \right).$$

На поверхности земли X и Y — те самые горизонтальные составляющие, которые были обозначены выше этими буквами, и Z есть вертикальная составляющая — положительная, когда она направлена вниз; поэтому выражения этих сил на поверхности земли будут:

$$\begin{aligned} X &= - \left(\frac{\partial P'}{\partial u} + \frac{\partial P''}{\partial u} + \frac{\partial P'''}{\partial u} + \dots \right), \\ Y &= - \frac{1}{\sin u} \left(\frac{\partial P'}{\partial \lambda} + \frac{\partial P''}{\partial \lambda} + \frac{\partial P'''}{\partial \lambda} + \dots \right), \\ Z &= 2P' + 3P'' + 4P''' + \dots \end{aligned}$$

§ 20

Соединив с этими предложениями известную теорему, что всякая функция от λ и u , которая для всех значений λ от 0 до 360° и u от 0 до 180° имеет определенное конечное значение, может быть разложена в ряд вида

$$P^0 + P' + P'' + P''' + \dots,$$

общий член которого P^n удовлетворяет вышеприведенному уравнению в частных производных; далее, что такое разложение возможно единственным, вполне определенным образом и что такой ряд всегда сходится^[12], мы получим следующие замечательные предложения:

I. Знание значений V во всех точках поверхности земли достаточно, чтобы вывести отсюда общее выражение для всего бесконечного пространства вне земной поверхности, и, значит, возможно определение сил X , Y , Z не только для поверхности земли, но и для всего бесконечного пространства вне ее. Очевидно, что для этого необходимо только разложить $\frac{V}{R}$ по указанной теореме в ряд.

Поэтому в дальнейшем символ V должен рассматриваться в его ограниченном смысле, т. е. для поверхности земли, если только противное не высказано явно, т. е. V надо по-

нимать как такую функцию от λ и u , которая следует из общего выражения, если в нем положить $r=R$, т. е.

$$V=R(P'+P''+P'''+\dots).$$

II. Знание значений X во всех точках земной поверхности достаточно, чтобы достигнуть всего изложенного в п. I. В самом деле, по § 15 интеграл $\int_0^u X du = \frac{V^0 - V}{R}$, где V^0 есть значение V в северном полюсе, и разложение $\int_0^u X du$ в ряд указанного вида должно по необходимости быть тождественно с

$$V^0 - P' - P'' - P''' - \dots$$

III. Таким же образом, с принятием в расчет § 16, ясно, что знание значений Y для всей Земли, соединенное со знанием значений X во всех точках линии, идущей от одного полюса к другому, достаточно для обоснования *полной* теории земного магнетизма.

IV. Наконец, ясно, что полная теория может быть выведена из знания величины Z для всей поверхности земли. В самом деле, если Z разложить в ряд

$$Z=Q^0+Q'+Q''+Q'''+\dots,$$

причем общий член удовлетворяет многократно упоминавшемуся дифференциальному уравнению, то будет:

$$Q^0=0; \quad P'=\frac{1}{2} Q'; \quad P''=\frac{1}{3} Q''; \quad P'''=\frac{1}{4} Q''', \dots$$

§ 21

Вследствие простого вида зависимости сил X , Y , Z от одной единственной функции и простого соотношения их между собою, ими гораздо более удобно пользоваться для обоснования теории, чем обычным представлением магнитной силы через ее три элемента: полную напряженность, накло-

нение и склонение; точнее, последний способ, сколь он ни кажется сам по себе естественным при передаче явления, не может быть применен к обоснованию теории, по крайней мере для первого ее обоснования, пока он не будет преобразован в другой. В этом отношении было бы очень желательно, чтобы было представлено общее географическое распределение горизонтальной составляющей, отчасти потому, что оно ближе к применимому для теории, нежели полная напряженность, отчасти и потому, что в большинстве случаев горизонтальная составляющая наблюдается на самом деле, полная же напряженность выводится из нее только вычислением при помощи наклона.

Рекомендуется получать непосредственно элементы горизонтального магнетизма, тем более что при теперешних приборах они определяются с весьма большой точностью; по меньшей мере, при указании полной напряженности, полученной вычислением по наблюдаемой горизонтальной напряженности, всегда следует вместе с тем указывать значение наклона, примененного при вычислении, чтобы тот, кто будет ими пользоваться для теории, имел бы возможность восстановить первоначальные числа неискаженными.

Сколь бы ни было интересным обосновать полную теорию земного магнетизма по наблюдениям горизонтальной стрелки и отсюда вывести наклонение и вертикальную силу, в настоящее время делать это еще преждевременно, — недостаточное число данных, имеющихся в настоящее время, не позволяет отказаться от пользования вертикальной силой. В сущности, теория получает подтверждение, если может быть показано объединение всех элементов одним принципом.

§ 22

Хотя мы *a priori* уверены, что ряды для V , X , Y , Z сходятся, но заранее определить степень сходимости нельзя. Если бы источники магнитных сил были сосредоточены в пространстве

умеренных размеров вокруг центра Земли или если бы имело место такое распределение магнитных жидкостей в Земле, которое было эквивалентно указанному случаю, то ряды сходились бы весьма быстро; но чем ближе эти источники простираются к поверхности и чем более неравномерно их распределение, тем скорее можно ожидать медленной сходимости рядов.

При практических приложениях абсолютная точность не достижима, задают лишь некоторую степень приближения, соответствующую обстоятельствам. Чем медленнее сходимость, тем большее число членов надо принимать, чтобы получить заданную степень точности.

P' содержит три члена и требует знания трех коэффициентов $g^{1,0}$, $g^{1,1}$, $h^{1,1}$; P'' требует пять коэффициентов, P''' семь, P'''' девять; таким образом, если P' , P'' , P''' и т. д. принять за величины первого, второго, третьего и т. д. порядка, то ясно, что если вычисление продолжить до величин порядка n включительно, то должны быть получены значения $n^2 + 2n$ коэффициентов.

Каждое заданное значение X , Y , Z для данных u и λ доставляет одно уравнение между коэффициентами; следовательно, полное задание элементов земного магнетизма в данном месте доставляет три уравнения. Если бы можно было принять, что остаются заметными лишь члены до четвертого порядка, то для определения всех нужных коэффициентов было бы теоретически достаточно полных наблюдений в восьми различных точках; но подобное предположение с трудом допустимо, ибо все случайные ошибки, присоединяясь к отбрасыванию членов высшего порядка, могли бы исказить результаты.¹

¹ С наименьшим вредом действовали бы эти обстоятельства, если взять восемь точек, совершенно симметрично распределенных, т. е. расположенных по углам вписанного в земной шар куба или весьма близко к подобному положению.

Чтобы уменьшить вредное влияние подобных обстоятельств, необходимо было бы взять число наблюдений гораздо большее, чем число неизвестных в точках, отстоящих далеко друг от друга на разных частях Земли, и вывести отсюда неизвестные по способу наименьших квадратов. Сколько ни однообразно было бы выполнение этой работы, но чрезвычайная громоздкость вычислений, происходящая от большого числа неизвестных и уравнений, могла бы отпугнуть самого смелого вычислителя от подобной работы в том виде, какова она теперь, в особенности потому, что включение недостоверных наблюдений или погрешности вычислений могли бы испортить успех.

§ 23

Но существует другой способ, избавляющий от части этих затруднений, который, кажется, с выгодой может быть применен в качестве первой попытки и который мы здесь изложим, не умалчивая, однако, о трудностях, возникающих с применением этого способа при теперешнем положении дела. Этот способ предполагает знание всех трех элементов в точках, лежащих на достаточном числе параллелей так, что каждая параллель разделяется этими точками на достаточное число равных частей.

Из заданных в обыкновенной форме элементов надо прежде всего найти численное значение X , Y , Z .

Затем, по известному способу, для каждой параллели приводят X , Y , Z к виду:

$$X = k + k' \cos \lambda + K' \sin \lambda + k'' \cos 2\lambda + K'' \sin 2\lambda + k''' \cos 3\lambda + \\ + K''' \sin 3\lambda + \dots ,$$

$$Y = l + l' \cos \lambda + L' \sin \lambda + l'' \cos 2\lambda + L'' \sin 2\lambda + l''' \cos 3\lambda + \\ + L''' \sin 3\lambda + \dots ,$$

$$Z = m + m' \cos \lambda + M' \sin \lambda + m'' \cos 2\lambda + M'' \sin 2\lambda + m''' \cos 3\lambda + \\ + M''' \sin 3\lambda + \dots$$

Таким образом, для каждого из коэффициентов $k, l, m, k' \dots$ получится столько значений, сколько взято параллелей.

Согласно теории, на каждой параллели должно бы быть $l=0$; значения l , следующие из вычислений, дают как бы род масштаба для степени ненадежности чисел, взятых для вычислений.

Из уравнений

$$k = -g^{1,0} \frac{\partial P^{1,0}}{\partial u} - g^{2,0} \frac{\partial P^{2,0}}{\partial u} - g^{3,0} \frac{\partial P^{3,0}}{\partial u} - \dots,$$

$$m = 2g^{1,0} p^{1,0} + 3g^{2,0} p^{2,0} + 4g^{3,0} p^{3,0} + \dots,$$

общее число которых в два раза больше числа параллелей, вычислим (после того, как подставим в $\frac{\partial P^{1,0}}{\partial u}$ и т. д. и в $P^{1,0}$

и т. д. соответствующие значения u) из коэффициентов $g^{1,0}, g^{2,0}, g^{3,0}$ столько, сколько надо ввести в рассмотрение по способу наименьших квадратов.

Совершенно так же уравнения

$$-k' = g^{1,1} \frac{\partial P^{1,1}}{\partial u} + g^{2,1} \frac{\partial P^{2,1}}{\partial u} + g^{3,1} \frac{\partial P^{3,1}}{\partial u} + \dots,$$

$$L' = g^{1,1} \frac{P^{1,1}}{\sin u} + g^{2,1} \frac{P^{2,1}}{\sin u} + g^{3,1} \frac{P^{3,1}}{\sin u} + \dots,$$

$$m' = 2g^{1,1} P^{1,1} + 3g^{2,1} P^{2,1} + 4g^{3,1} P^{3,1} + \dots,$$

число которых в три раза больше числа параллелей, послужат для определения коэффициентов $g^{1,1}, g^{2,1}, g^{3,1}$ и т. д.; точно так же следующие уравнения

$$-K' = h^{1,1} \frac{\partial P^{1,1}}{\partial u} + h^{2,1} \frac{\partial P^{2,1}}{\partial u} + h^{3,1} \frac{\partial P^{3,1}}{\partial u} + \dots,$$

$$-l' = h^{1,1} \frac{P^{1,1}}{\sin u} + h^{2,1} \frac{P^{2,1}}{\sin u} + h^{3,1} \frac{P^{3,1}}{\sin u} + \dots,$$

$$M' = 2h^{1,1} P^{1,1} + 3h^{2,1} P^{2,1} + 4h^{3,1} P^{3,1} + \dots$$

послужат для определения коэффициентов $h^{1,1}, h^{2,1}, h^{3,1} \dots$

Далее, для определения коэффициентов $g^{2,2}$, $g^{3,2}$, $g^{4,2}$... послужат уравнения:

$$-k'' = g^{2,2} \frac{\partial P^{2,2}}{\partial u} + g^{3,2} \frac{\partial P^{3,2}}{\partial u} + g^{4,2} \frac{\partial P^{4,2}}{\partial u} + \dots,$$

$$L'' = 2g^{2,2} \frac{P^{2,2}}{\sin u} + 2g^{3,2} \frac{P^{3,2}}{\sin u} + 2g^{4,2} \frac{P^{4,2}}{\sin u} + \dots,$$

$$m'' = 3g^{2,2} P^{2,2} + 4g^{3,2} P^{3,2} + 5g^{4,2} P^{4,2} + \dots$$

Подобным же образом получаются и коэффициенты следующих высших порядков.

§ 24

Преимущество этого приема перед развитым в § 22 состоит главным образом в том, что неизвестные величины распадаются на группы, причем каждая из них определяется сама по себе, вследствие чего вычисление необыкновенно облегчается, тогда как при другом способе увеличение числа неизвестных и их смешение между собою делает их разделение весьма трудным. Однако этот прием имеет тот недостаток, что основанием его не служат непосредственные наблюдения, а что эти основания надо заимствовать из графических представлений, так что в тех местностях, где наблюдения имеются, графическое представление их является все же грубым, а для тех местностей, где наблюдений мало, приходится их дополнять гадательно, как бы произвольно, что может в значительной мере удалить от истины. Между тем не остается другого выбора, как отложить все попытки до тех пор, пока не будут получены более полные и надежные данные, или с имеющимися теперь весьма недостаточными материалами решаться на первое испытание, от которого можно ожидать немногим более чем грубое приближение. Строгое сличение результатов с действительно произведенными наблюдениями даст затем надежную оценку достоинства результата во всех местностях Земли; и если такая проверка покажет, что этот первый опыт не является совсем неудач-

ным, то это поможет подготовить тем или иным путем в будущем новые попытки более целесообразно.

§ 25

Уже много лет как я начинал производить подобные попытки, но всегда был вынужден оставлять их, так как данные, имеющиеся в моем распоряжении, представлялись слишком скудными. Тем не менее я раньше довел бы такую попытку до конца, если бы было исполнено неоднократно высказанное мною положение, чтобы на общей карте были представлены горизонтальные напряженности в чистом виде; отсутствие такой карты не могло быть возмещено соединением имеющихся неполных общих карт наклонения и полной напряженности.

Появление карты Сэбайна для полной напряженности (в „Seventh Report of the British Association for the advancement of science“) дало мне повод предпринять новую попытку, которую должно рассматривать с точки зрения, данной в предыдущем параграфе.

Данные, подлежащие вычислению, были взяты с упомянутой карты для напряженности; для склонений — с карты Барлоу (Philosophical Transactions, 1833) и для наклонений — с карты Хорнера (Physikalisches Wörterbuch, B. 6), именно для двенадцати точек на семи параллелях. Пробелы, оставляемые этими картами на больших пространствах, могли быть пополнены лишь на основании в высшей степени гадательного предположения.

Во время вычисления вскоре оказалось, что таковое должно быть продолжено до членов четвертого порядка, сообразно чему число определяемых коэффициентов возрастает до 24. По всей вероятности, члены пятого порядка были бы еще достаточно велики; но при первой попытке значения k , m , k' , ... оказались настолько сильно подверженными влиянию многих недостаточно надежных данных, которыми пришлось бы воспользоваться, что в работу по исключению нельзя было привлечь большее число неизвестных.

Необходимо еще заметить, что на карте Сэбайна показаны величины напряженности в произвольных единицах, как это до сих пор обыкновенно делалось, при которых полная напряженность в Лондоне равна 1.372. Эти единицы при вычислении коэффициентов, так же как и при составлении вспомогательных таблиц, изменены таким образом, что все числа умножены на 1000, так что напряженность в Лондоне принята равной 1372. Впрочем, очевидно, что для напряженности можно взять за единицу любую произвольную величину; тогда единицу для μ также надо считать произвольной и выбирать соответственно первой. Если желательно применить сюда дальнейшие следствия, для которых μ должно быть выражено в абсолютной мере, то надо только все коэффициенты умножить на один и тот же множитель, который необходим для приведения всех напряженностей к абсолютной мере.

§ 26

Численные значения 24 коэффициентов, полученные по первому вычислению, причем долготы λ считаются к востоку от Гринича, суть следующие:

$$\begin{array}{llll}
 g^{1,0} = + 925.782, & g^{3,1} = + 122.936, & g^{2,2} = + 0.493, & g^{3,3} = + 1.396 \\
 g^{2,0} = - 22.059, & g^{4,1} = - 152.589, & g^{3,2} = - 73.193, & g^{4,3} = + 19.774 \\
 g^{3,0} = - 18.868, & h^{1,1} = - 178.744, & g^{4,2} = - 45.791, & h^{3,3} = - 18.750 \\
 g^{4,0} = - 108.855, & h^{2,2} = - 6.030, & h^{2,2} = - 39.010, & h^{4,3} = - 0.178 \\
 g^{1,1} = + 89.024, & h^{3,1} = + 47.794, & h^{3,2} = - 22.766, & g^{4,4} = + 4.127 \\
 g^{2,1} = - 144.913, & h^{4,1} = + 64.112, & h^{4,2} = + 42.573, & h^{4,4} = + 3.175
 \end{array}$$

Эти числа, которые должно рассматривать как *элементы теории земного магнетизма* [13], даны здесь в точности в том самом виде и приняты в основание ниже описываемой вспомогательной таблицы, как их дало вычисление без отбрасывания десятичных дробей. Для всякого привычного вычислителя излишне замечание, что эти дроби не имеют никакого значения, ибо мы еще весьма далеки от того, чтобы опре-

делять целые единицы с достоверностью; но важно, чтобы наблюдения строго сличались с одной и той же определенной системой элементов, и не было бы основания что-либо изменять в том, что дало вычисление, ибо при отбрасывании десятичных дробей не было бы никакого выигрыша для вычислений по сличению.

§ 27

Развернутое выражение для V по предыдущим числам есть следующее, причем положено для краткости $e = \cos u$, $f = \sin u$;

$$\begin{aligned} \frac{V}{R} = & -1.977 + 937.103e + 71.245e^2 - 18.868e^3 - 108.855e^4 + \\ & + (64.437 - 79.518e + 122.936e^2 + 152.589e^3) f \cos \lambda + \\ & + (-188.303 - 33.507e + 47.794e^2 + 64.112e^3) f \sin \lambda + \\ & + (7.035 - 73.193e - 45.791e^2) f^2 \cos 2\lambda + \\ & + (-45.092 - 22.766e - 42.573e^2) f^2 \sin 2\lambda + \\ & + (1.396 + 19.774e) f^3 \cos 3\lambda + \\ & + (-18.750 - 0.178e) f^3 \sin 3\lambda + \\ & + 4.127 f^4 \cos 4\lambda + \\ & + 3.175 f^4 \sin 4\lambda +. \end{aligned}$$

Здесь же приведем и полностью развернутые выражения для трех слагающих магнитной силы:

$$\begin{aligned} \dots = & (937.103 + 142.490e - 56.603e^2 - 435.420e^3) f + \\ & + (-79.518 + 181.435e - 298.732e^2 - 368.808e^3 + \\ & + 610.357e^4) \cos \lambda + \\ & + (-33.507 + 283.892e + 259.349e^2 - 143.383e^3 - \\ & - 256.448e^4) \sin \lambda + \\ & + (-79.193 - 105.652e + 219.579e^2 + 183.164e^3) f \cos 2\lambda + \\ & + (-22.766 + 175.330e + 68.098e^2 - 170.292e^3) f \sin 2\lambda + \\ & + (19.774 - 4.188e - 79.096e^2) f^2 \cos 3\lambda + \\ & + (-0.178 + 56.250e + 0.716e^2) f^2 \sin 3\lambda - \\ & - 16.508e f^3 \cos 4\lambda - \\ & - 12.701 e f^3 \sin 4\lambda; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y = & (188.303 + 33.507e - 47.494e^2 - 64.112e^3) \cos \lambda + \\
& + (64.437 - 79.518e + 122.936e^2 - 152.589e^3) \sin \lambda + \\
& + (90.184 + 45.532e - 85.146e^2) f \cos 2\lambda + \\
& + (14.070 - 146.386e - 91.582e^2) f \sin 2\lambda + \\
& + (56.250 + 0.534e) f^2 \cos 3\lambda + \\
& + (4.188 + 59.322e) f^2 \sin 3\lambda - \\
& - 12.701 f^3 \cos 4\lambda + \\
& + 16.508 f^3 \sin 4\lambda;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z = & -24.593 + 1896.847e + 400.343e^2 - 75.471e^3 - 544.275e^4 + \\
& + (79.700 - 107.763e + 491.744e^2 - 762.946e^3) f \cos \lambda + \\
& + (-395.724 - 155.473e + 191.176e^2 + 320.560e^3) f \sin \lambda + \\
& + (34.187 - 292.772e - 228.955e^2) f^2 \cos 2\lambda + \\
& + (-147.439 - 91.064e + 212.865e^2) f^2 \sin 2\lambda + \\
& + (5.584 + 98.870e) f^3 \cos 3\lambda + \\
& + (-75.000 - 0.890e) f^3 \sin 3\lambda + \\
& + 20.635 f^4 \cos 4\lambda + \\
& + 15.876 f^4 \sin 4\lambda.
\end{aligned}$$

После того как эти слагающие вычислены для заданного места, получают и данные для определения магнитной силы в обычной форме следующим образом: пусть δ есть склонение, i — наклонение и ψ — полная, ω — горизонтальная напряженность; сперва определяют δ и ω по формулам

$$X = \omega \cos \delta; \quad Y = \omega \sin \delta,$$

после чего находят i и ψ по следующим формулам:

$$\omega = \psi \cos i; \quad Z = \psi \sin i.$$

§ 28

Так как формулы для X , Y , Z содержат вместе 71 член, то непосредственно по ним вычисление составляет довольно затруднительную работу, и повторение ее для большого числа мест представило бы нечто пугающее, ибо без того, чтобы повторить это вычисление два раза, нельзя быть

уверенным в отсутствии ошибок в вычислении. Немного бы выиграли, если бы отбросили все члены, коэффициенты которых меньше 1, или даже меньше 10, ибо число прочих составило бы тогда еще 65. Но так как вся ценность работы оставалась бы неопределенной, если бы ее не проверить сравнением с значительным числом действительных наблюдений, поэтому я не испугался труда, чтобы составить вспомогательную таблицу,¹ при использовании которой работа значительно сокращается и облегчается, чем достигается в значительной мере предохранение от ошибок в вычислении. Основанием таблицы служит то, что значения слагающих пишутся в следующем виде:

$$X = a^0 + a' \cos(\lambda + A') + a'' \cos(2\lambda + A'') + a''' \cos(3\lambda + A''') + a'''' \cos(4\lambda + A'''),$$

$$Y = b' \cos(\lambda + B') + b'' \cos(2\lambda + B'') + b''' \cos(3\lambda + B''') + b'''' \cos(4\lambda + B'''),$$

$$Z = c^0 + c' \cos(\lambda + C') + c'' \cos(2\lambda + C'') + c''' \cos(3\lambda + C''') + c'''' \cos(4\lambda + C''').$$

Таблица первая содержит величины a'' и c' , не зависящие от λ ; в остальных четырех таблицах показаны вспомогательные углы A' , A'' и т. д. и логарифмы a' , a'' , a''' и т. д., все через один градус широты $\varphi = 90^\circ - u$ [14].

Для примера покажем вычисление для Геттингена.

По широте $+51^\circ 32'$ находим из таблиц:

$a^0 = +500.8$		$c^0 = +1465.2$
$\log a' = 2.28980$	$\log b' = 2.18900$	$\log c' = 2.20\ 04$
$\log a'' = 1.79403$	$\log b'' = 2.03220$	$\log c'' = 2.12777$
$\log a''' = 1.32522$	$\log b''' = 1.46845$	$\log c''' = 1.43199$
$\log a'''' = 0.59341$	$\log b'''' = 0.70016$	$\log c'''' = 0.59091$
$A' = 249^\circ 30'$	$B' = 358^\circ 24'$	$C' = 105^\circ 44'$
$A'' = 311\ 45$	$B'' = 64\ 50$	$C'' = 165\ 15$
$A''' = 234\ 10$	$B''' = 318\ 13$	$C''' = 42\ 22$
$A'''' = 142\ 26$	$B'''' = 232\ 26$	$C'''' = 322\ 26$

¹ Вычисление части этой вспомогательной таблицы произвел доктор Гольдшмидт.

После этого при долготе $\lambda = 9^\circ 56'.5$ отдельные слагаемые составляющих X , Y , Z будут таковы:

X	Y	Z
+ 500.8	—	+ 1465.2
— 35.71	+ 152.89	— 68.99
+ 54.76	+ 9.92	— 133.67
— 2.21	+ 28.77	+ 8.27
— 3.92	+ 0.19	+ 3.90
$X = + 513.72$	$Y = + 191.77$	$Z = + 1274.71$

Дальнейшее вычисление дает затем:

$$\delta = + 20^\circ 28', \quad \log \omega = - 2.73907$$

$$i = + 66^\circ 43'$$

$$\psi = 1387.6, \text{ иначе в обыкновенных единицах } - \psi = 1.3876.$$

§ 29

Следующая таблица представляет сличение наших формул с наблюдениями в 91 точке всех частей Земли^[15]. Так как три карты, с которых были взяты данные для наших вычислений, предназначены для представления элементов земного магнетизма для последнего времени, то для сравнения были взяты лишь наблюдения последнего времени, и преимущественно таких мест, где были наблюдаемы все три элемента. Требование точной одновременности еще не может быть поставлено без того, чтобы не свести наш запас к весьма небольшому числу.

Относительно наблюдений, приведенных здесь (в конце этого пункта) для сравнения, я сделаю еще следующие указания.

Определения напряженностей заимствованы большей частью из работы Сэбайна „Report on the variation of magnetic intensity“ (в уже выше упомянутом „Seventh Report of the British Association for the advancement of science“).

Большое число наблюдений в России и в пограничных частях Китая нами получено от Ханстина (Poggendorf's Anna-

len), Эрмана („Reise um die Erde“ и рукописные сообщения), Гумбольдта (Voyage aux regions equinoxiales, t. 13), Фусса (Mémoires de l'Académie des Sciences de St. Pétersbourg, Sixième Série), Федорова (рукопись, переданная Струве), Рейнке (Observations météorologiques et magnétiques faites dans l'étendue de l'empire de Russie, rédigées par A. T. Kupfer, Nr. II).

Для следующих мест взято среднее из определений нескольких наблюдателей, причем иногда они расходятся больше, чем это можно отнести за счет годовых изменений.

(12) Т о б о л ь с к

Склонение:	Ханстин	1828	— 9°58'
	Эрман	1828	— 9 47
	Фусс	1830	—11 52
	Федоров	1833	—10 20
Наклонение:	Эрман	1828	71 7
	Гумбольдт	1829	70 56
	Фусс	1830	71 1
	Федоров	1833	71 2

(16) Е к а т е р и н б у р г [16]

Склонение:	Хаистин	1828	— 6°27'
	Эрман	1828	— 7 23
	Рейнке	1836	— 5 5
Наклонение:	Эрман	1828	69 24
	Гумбольдт	1829	69 6
	Фусс	1830	69 19
	Федоров	1832	69 15

(17) Т о м с к

Склонение:	Хаистин	1828	— 8°32'
	Эрман	1829	— 8 36
Наклонение:	Эрман	1829	70 59
	Фусс	1830	70 51

(18) Нижний Новгород [16]

Эрман 1828 — 0°46'

Фусс 1830 — 0 8

(19) Красноярск

Склонение: Ханстин 1829 — 6°43'

Эрман 1829 — 6 37

Федоров 1835 — 7 26

Наклонение: Эрман 1829 70 53

Федоров 1835 71 8

(20) Казань

Наклонение: Эрман 1828 68°21'

Гумбольдт 1829 68 27

Фусс 1830 68 26

(21) Москва

Склонение: Ханстин 1828 + 3° 3'

Эрман 1828 + 3 1

Наклонение: Эрман 1828 68 58

Гумбольдт 1829 68 57

(30) Иркутск

Склонение: Ханстин 1829 — 1°37'

Эрман 1829 — 1 52

Фусс 1830 — 1 25

Наклонение: Эрман 1829 68 7

Фусс 1830 68 15

Фусс 1832 68 20

(36) Оренбург [16]

Наклонение: Гумбольдт 1829 64°41'

Федоров 1832 64 47

(44) Троицкосавск [16]

Склонение: Ханстин 1829 0° 5'

Эрман 1829 0 33

Фусс 1830 — 0 1

Наклонение: Эрман	1829	66° 14'
Фусс	1830	66 24

Большая часть наблюдений в южном полушарии произведена капитанами Кинг и Фиц-Рой и взята из небольшой статьи (Sabine. Magnetic Observations made during the voyages of the ships „Adventure“ and „Beagle“, 1826—1836).

Определения для остальных отдельных точек взяты отчасти из вышеприведенных источников; из других я упомяну о следующих:

(1) Шпицберген. Наблюдатель Сэбайн, 1823. (Из его „Account of Experiments to determine the figure of the earth“).

(2) Гаммерфест. Склонение и наклонение по Сэбайну, 1823 (из предыдущего сочинения) и из Parry, 1827 (из „Narrative of an attempt to reach the North Pole“).

(3) Магнитный полюс — по Россу, 1831 (Philosophical Transactions, 1834).

(4) Рейкьявик. Наблюдения Лоттена, 1836 (Voyage en Islande).

(28) Берлин — по Энке (Astronomisches Jahrbuch, 1839).

(38) Геттинген. Склонение относится к 1835 г., октябрь 1. („Результаты“ за 1836). Наклонение найдено интерполяцией по наблюдениям Гумбольдта, 1826, и Форба, 1837, приведенным к этой эпохе.

(39) Лондон. По сообщенным в рукописи наблюдениям склонения капитана Росса; наклонения — по наблюдениям Филлипса, Фокса, Росса, Джонсона и Сэбайна; средняя эпоха для склонения — апрель 1838, для наклонений — май 1838.

(48) Париж, 1835, из „Annuaire“ для 1836.

(54) Милан, 1837, по рукописному сообщению Крейля.

(58) Неаполь, 1835, по наблюдениям Сарториуса и Листинга. Напряженность, определенная в абсолютной мере, приведена в обычную меру множителем, данным ниже (§ 31).

(64) Мадрас, 1837, по наблюдениям Тэйлора, взятым из „Journal of the Asiatic Society of Bengal“, май 1837.

§ 30

Если при обсуждении разностей между вычислением и наблюдением, которое доставляется предыдущей таблицей, принять в соображение, что, с одной стороны, почти все наблюдения подвержены погрешностям определений и случайным аномалиям самой магнитной силы и не соответствуют одному и тому же году,¹ что, с другой стороны, в наших формулах содержатся члены лишь до четвертого порядка, тогда как следующие члены могут быть еще весьма заметны, то согласие между вычислением и наблюдением удовлетворяет всем требованиям, которые можно предъявить к первой попытке.

Наше выражение для $\frac{V}{R}$ должно поэтому быть рассматриваемо как близкое к истине, по крайней мере в его главнейших членах, и поэтому стоило затратить труд на то, чтобы дать для $\frac{V}{R}$ графически наглядное представление. Это исполнил д-р Гольдшмидт на карте в трех частях, из которых первая — в меркаторской проекции для пояса между 70° северной широты и 70° южной, две другие — для полярных областей до 65° в стереографической проекции [17]. Поправки и дополнения, которые в будущем явятся необходимыми

¹ Сообщенное в предыдущем пункте уже дает некоторые образцы значительных расхождений между различными наблюдателями в одном и том же месте; здесь могут быть приведены еще другие примеры, когда расхождение гораздо больше, чем это могло бы быть вызвано правильными годовыми изменениями. Наклонение в Вальпарайзо в 1829 г. было, по Кингу, — $40^\circ 11'$; в 1835 г., по Фиц-Рою, — $38^\circ 3'$. На острове св. Маврикия напряженность в 1818 г. была, по Фрейсинэ, 1.096, а в 1836 г., по Фиц-Рою, 1.192. Еще больше разница в о. Таити, где напряженность, по Эрману, равна 1.172, а в 1835 г., по Фиц-Рою, равна 1.017. Эта последняя разница в месте, столь важном для исправления элемента в будущем, значительно превосходит наибольшую разницу, выявленную нашими 86 сравнениями вычисленных напряженностей с наблюдаемыми.

	Широта	Долгота	Склонение		
			вычис- ленное	наблю- денное	разность
1. Шпицберген	+79°50'	11°40'	+26°31'	+25°12'	+1°19'
2. Гаммерфест	70 40	23 46	+12 23	+10 50	+1 33
3. Магнитный полюс Росса	70 5	263 14	—22 23	—	—
4. Рейкьявик	64 8	338 5	+40 12	+43 14	—3 2
5. Якутск	62 1	129 45	+ 0 5	+ 5 50	—5 45
6. Поротовск	62 1	131 50	+ 0 4	+ 4 46	—4 42
7. Ночинск	61 57	134 57	— 0 3	+ 2 11	—2 14
8. Чернолес	61 31	136 23	0 0	+ 3 30	—3 30
9. Петербург	59 56	30 19	+ 6 47	+ 6 44	+0 3
10. Христиания [16]	59 54	10 44	+19 55	+19 50	+0 5
11. Охотск	59 21	143 11	— 0 18	+ 2 18	—2 36
12. Тобольск	58 11	68 16	— 7 19	—10 29	+3 10
13. Река Тигиль	58 1	158 15	— 4 20	— 4 6	—0 14
14. Ситка	57 3	224 35	—28 45	—28 19	—0 26
15. Тара	56 54	74 4	— 7 44	— 9 36	+1 52
16. Екатеринбурга	56 51	60 34	— 5 20	— 6 18	+0 58
17. Томск	56 30	85 9	— 7 21	— 8 34	+1 13
18. Нижний Новгород . .	56 19	43 57	+ 1 10	— 0 27	+1 37
19. Красноярск	56 1	92 57	— 5 49	— 6 40	+0 51
20. Казань	55 48	49 7	— 1 7	— 2 22	+1 15
21. Москва	55 46	37 37	+ 4 26	+ 3 2	+1 24
22. Кенигсберг [16]	54 43	20 30	+14 15	+13 22	+0 53
23. Барнаул	53 20	83 56	— 7 0	— 7 25	+0 25
24. Устьеретенск	53 20	121 51	+ 1 29	+ 4 21	—2 52
25. Горбицкое	53 6	119 9	+ 1 5	+ 2 54	—1 49
26. Петропавловск [16] . .	53 0	158 40	— 3 34	— 4 6	+0 32
27. Урюпина	52 47	120 4	+ 1 16	+ 4 4	—2 48
28. Берлин	52 30	13 24	+18 31	+17 5	+1 26

Наклонение			Напряженность		
вычислен- ное	наблюден- ное	разность	вычислен- ное	наблюден- ное	разность
+82° 1'	+81°11'	+0°50'	1.599	1.562	+0.037
77 19	77 15	0 4	1.545	1.506	+0.039
88 48	90 0	—1 12	1.717	—	—
80 40	77 0	+3 40	1.527	—	—
74 36	74 18	+0 18	1.661	1.697	—0.036
74 27	74 0	+0 27	1.658	1.721	—0.063
74 12	73 37	+0 35	1.653	1.713	—0.060
73 48	73 8	+0 40	1.648	1.700	—0.052
70 25	71 3	—0 38	1.469	1.410	+0.059
72 4	72 7	—0 3	1.456	1.419	+0.037
71 36	70 41	+0 55	1.621	1.615	+0.006
70 13	71 1	—0 48	1.575	1.557	+0.018
69 55	68 28	+1 27	1.583	1.577	+0.006
76 30	75 51	+0 39	1.697	1.731	—0.034
69 46	70 28	—0 42	1.586	1.575	+0.011
68 24	69 16	—0 52	1.535	1.523	+0.012
70 33	70 55	—0 22	1.613	1.619	—0.006
67 9	68 41	—1 32	1.469	1.442	+0.027
70 24	71 0	—0 36	1.638	1.657	—0.019
67 13	68 25	—1 12	1.477	1.433	+0.044
66 45	68 57	—2 12	1.446	1.404	+0.042
67 19	69 26	—2 7	1.410	1.365	+0.045
67 50	68 10	—0 20	1.591	1.605	—0.014
68 32	68 11	+0 21	1.609	1.656	—0.047
68 32	68 22	+0 10	1.611	1.660	—0.049
65 31	63 50	+1 41	1.521	1.489	+0.032
68 17	67 53	+0 24	1.612	1.667	—0.055
66 45	68 7	—1 22	1.391	1.367	+0.024

	Широта	Долгота	Склонение		
			вычис- ленное	наблю- денное	разность
29. Погромное	+52°30'	111° 3'	— 0°38'	+ 0°18'	—0°56'
30. Иркутск	52 17	104 17	— 2 27	— 1 38	—0 49
31. Сретенск	52 15	117 40	+ 0 54	+ 2 52	—1 58
32. Степное	52 10	106 21	— 1 52	— 1 8	—0 44
33. Читанское	52 1	123 27	0 0	+ 1 13	—1 13
34. Нерчинск	51 56	116 31	+ 0 42	+ 2 53	—2 11
35. Верхнеудинск [16] . . .	51 50	107 46	— 1 26	— 0 24	—1 2
36. Оренбург	51 45	55 6	— 2 48	— 3 22	+0 34
37. Аргунское	51 33	119 56	+ 1 22	+ 3 44	—2 22
38. Геттинген	51 32	9 56	+ 2 28	+18 38	+1 50
39. Лондон	51 31	359 50	+25 37	+24 0	+1 37
40. Нерчинский завод . .	51 19	119 37	+ 1 20	+ 4 6	—2 46
41. Чиндант	50 34	115 32	+ 0 34	+ 2 14	—1 40
42. Харазайская	50 29	104 44	— 2 9	— 2 27	+0 18
43. Цурухайтуй	50 23	119 3	+ 1 18	+ 3 11	—1 53
44. Тронцкосавск	50 21	106 45	— 1 34	— 0 12	—1 22
45. Абагайтуевское	49 35	117 50	+ 1 8	+ 2 54	—1 46
46. Алтанское	49 28	111 30	— 0 16	+ 0 48	—1 4
47. Менджинское	49 26	108 55	— 0 56	+ 0 12	—1 8
48. Париж	48 52	2 21	+24 6	+22 4	+2 2
49. Хунзал	48 13	106 27	— 1 30	— 1 6	—0 24
50. Урга [16]	47 55	106 42	— 1 26	— 1 16	—0 10
51. Астрахань	46 20	48 0	+ 1 40	+ 1 12	+0 28
52. Хологур	46 0	110 34	— 0 20	+ 0 49	—1 9
53. Эрги	45 32	111 25	— 0 6	+ 1 7	—1 13
54. Милан	45 28	9 9	+20 56	+18 33	+2 23
55. Сендши	44 45	110 26	— 0 20	+ 0 30	—0 50
56. Бачей	44 21	112 55	+ 0 16	+ 0 59	—0 43

Продолжение

Наклонение			Напряженность		
вычислен- ное	наблюден- ное	разность	вычислен- ное	наблюден- ное	разность
+68°25'	+68° 8'	+0 17	1.616	1.640	—0.024
68 17	68 14	+0 3	1.616	1.647	—0.031
67 55	67 38	+0 17	1.606	1.649	—0.043
68 12	68 10	+0 2	1.615	1.663	—0.048
67 56	67 42	+0 14	1.609	1.668	—0.059
67 43	67 11	+0 32	1.604	1.635	—0.031
67 55	68 6	—0 11	1.612	1.657	—0.045
63 14	64 44	—1 30	1.461	1.432	+0.029
67 10	66 54	+0 16	1.595	1.655	—0.060
66 43	67 56	—1 13	1.388	1.357	+0.031
68 54	69 17	—0 23	1.410	1.372	+0.038
66 59	66 33	+0 26	1.593	1.617	—0.024
66 35	66 32	+0 3	1.592	1.650	—0.058
66 45	66 56	—0 11	1.599	1.643	—0.044
66 12	66 13	—0 1	1.584	1.626	—0.042
66 38	66 19	+0 19	1.597	1.642	—0.045
65 33	64 48	+0 45	1.577	1.583	—0.006
65 46	65 20	+0 26	1.585	1.619	—0.034
65 48	65 31	+0 17	1.587	1.630	—0.043
66 45	67 24	—0 39	1.389	1.348	+0.041
64 42	64 29	+0 13	1.574	1.612	—0.038
64 25	64 4	+0 21	1.571	1.583	—0.012
56 59	59 58	—2 59	1.358	1.334	+0.024
62 31	61 54	+0 37	1.545	1.580	—0.035
61 58	61 22	+0 36	1.539	1.559	—0.020
62 13	63 48	—1 35	1.331	1.294	+0.037
61 15	60 42	+0 33	1.529	1.530	—0.001
60 46	60 18	+0 28	1.520	1.553	—0.033

	Широта	Долгота	Склонение		
			вычис- ленное	наблю- денное	разность
57. Шарабудургуна	+43°13'	114° 6'	+ 0°32'	+ 0°46'	—0°14'
58. Неаполь	40 52	14 16	+18 53	+15 20	+3 33
59. Калган	40 49	114 58	+ 0 42	+ 1 13	—0 31
60. Пекин	39 54	116 26	+ 0 58	+ 1 48	—0 50
61. Терсейра	38 39	332 47	+25 17	+24 18	+0 59
62. Сан-Франциско	37 49	237 35	—16 22	—14 55	—1 27
63. Порт Прайя	14 54	336 30	+16 17	+16 30	—0 13
64. Мадрас	13 4	80 17	— 4 1	—	—
65. О-ва Галапагос	— 0 50	270 23	— 8 57	— 9 30	+0 33
66. О. Вознесение	7 56	345 36	+14 37	+13 30	+1 7
67. Пернамбуку	8 4	325 9	+ 5 58	+ 5 54	+0 4
68. Кальяо	12 4	282 52	— 9 32	—10 0	+0 28
69. О. Килинг	12 5	96 55	+ 0 23	+ 1 12	—0 49
70. Байя	12 59	321 30	+ 3 12	+ 4 18	—1 6
71. О. св. Елены	25 55	354 17	+19 27	+18 0	+1 27
72. О. Таити	17 29	210 30	— 5 45	— 7 54	+2 9
73. Маврициус	20 9	57 31	+11 9	+11 18	—0 9
74. Рио-де-Жанейро	22 55	316 51	— 1 11	— 2 8	+0 57
75. Вальпарайзо	33 2	288 19	—13 45	—15 18	+1 33
76. Сидней	33 51	151 17	— 7 51	—10 24	+2 33
77. Мыс Доброй Надежды	+34 11	18 26	+27 24	+28 30	—1 6
78. Монте-Видео	34 53	303 47	—11 23	—12 0	+0 37
79. Пролив короля Георга	35 2	117 56	+ 5 12	+ 5 36	—0 24
80. Новая Зеландия	35 16	174 0	—11 10	—14 0	+2 50
81. Консепсион	36 42	286 50	—14 43	—16 48	+2 5
82. Байя Бланка	38 57	298 1	—12 57	—15 0	+2 3
83. Вальдивия	39 53	286 31	—16 13	—17 30	+1 17
84. О. Чилое	41 51	286 4	—16 56	—18 0	+1 4

Продолжение

Наклонение			Напряженность		
вычислен- ное	наблюден- ное	разность	вычислен- ное	наблюден- ное	разность
+59°32'	+59° 3'	+0°29	1.502	1.538	—0.036
56 26	58 53	—2 27	1.271	1.271	0
56 51	56 17	+0 34	1.465	1.459	+0.006
55 43	54 49	+0 54	1.448	1.453	—0.005
68 34	68 06	+0 28	1.469	1.457	+0.012
64 14	62 38	+1 36	1.592	1.591	+0.001
45 51	46 3	—0 12	1.168	1.156	+0.012
4 14	6 52	—2 38	1.038	1.031	+0.007
13 24	9 29	+3 55	1.085	1.069	+0.016
5 32	1 39	+3 53	0.813	0.873	—0.060
13 2	+13 13	—0 11	0.909	0.914	—0.005
4 39	— 6 14	+1 35	1.003	0.97	+0.033
39 19	—38 33	—0 46	1.161	—	—
3 59	+ 5 24	—1 25	0.883	0.871	+0.012
14 52	—18 1	+3 9	0.811	0.836	—0.025
27 26	—30 26	+3 0	1.113	1.094	+0.019
54 8	—54 1	—0 7	1.060	1.144	—0.084
14 49	—13 30	—1 19	0.879	0.878	+0.001
37 56	—39 7	+1 11	1.094	1.176	—0.083
58 11	—62 49	+4 38	1.667	1.685	—0.018
—51 4	—52 35	+1 31	0.981	1.014	—0.033
—35 34	—35 40	+0 6	1.022	1.060	—0.038
—62 39	—64 41	+2 2	1.658	1.709	—0.051
—54 46	—59 32	+4 46	1.616	1.591	+0.025
—42 49	—44 13	+1 24	1.147	1.218	—0.071
—42 1	—41 54	—0 7	1.103	1.113	—0.010
—46 13	—46 47	+0 34	1.145	1.238	—0.093
—48 14	—49 26	+1 12	1.227	1.313	—0.086

	Широта	Долгота	Склонение		
			вычис- ленное	наблю- денное	разность
85. Гоббарттоун	+42°53'	147°24'	— 5°51'	—11° 6'	+5°15'
86. Порт Лоу	43 48	285 58	—17 32	—19 48	+2 16
87. Порт Сан-Андрес . . .	46 35	284 25	—19 4	—20 48	+1 44
88. Порт Желанный . . .	47 45	294 5	—16 52	—20 12	+3 20
89. Санта-Крус	50 7	291 36	—18 23	—20 54	+2 31
90. О-ва Фалькленд . . .	51 32	301 53	—15 16	—19 0	+3 44
91. Порт Голода	—53 38	289 2	—20 28	—23 0	+2 32
8*. Порт Эчес	+60 21	213 19	—28 33	—31 38	+3 5
8**. Лервик	+60 9	358 53	+27 10	+27 16	—0 6
11*. Стокгольм	+59 20	18 4	+15 22	+14 57	+0 25
34*. Валенсия	+51 56	349 43	+30 2	+28 43	+1 19
40*. Брюссель	+50 52	4 50	+23 23	+22 19	+1 4
54*. Монреаль	+45 27	286 40	+ 5 23	+ 7 30	—2 7
62*. Оау	+21 17	202 0	—12 19	—10 40	—1 39
64*. Панама	+ 8 37	280 31	— 6 44	— 7 37	+0 53

вследствие новых и более совершенных данных, положенных в основу вычисления $\frac{V}{R}$, произведут, без сомнения, значительные перемещения в системе этих линий, в особенности в высоких южных широтах; но нельзя думать о существенных изменениях в общем распределении линий, ибо тогда выражение $\frac{V}{R}$ изменилось бы настолько, что утратилось бы согласие с имеющимися наблюдениями.

Таким образом, мы пришли к важному результату, что система линий равных значений V на поверхности земли действительно заключается в простейшем типе, описанном в § 11, и, следовательно, имеется *только два магнитных*

Продолжение

Наклонение			Напряженность		
вычислен- ное	наблюден- ное	разность	вычислен- ное	наблюден- ное	разность
—66°57'	—70°35'	+3°38'	1.894	1.817	+0.077
—50 4	—51 20	+1 16	1.257	1.326	—0.069
—53 0	—54 14	+1 14	1.310	—	—
—51 22	—52 43	+1 21	1.263	1.359	—0.096
—53 49	—55 16	+1 27	1.321	1.425	—1.104
—52 46	—53 25	+0 39	1.276	1.367	—0.091
—57 38	—59 53	+2 15	1.424	1.532	—0.108
+76 25	+76 3	+0 22	1.678	1.75	—0.072
+73 46	+73 45	+0 1	1.469	1.421	+0.048
+70 52	+71 40	+0 48	1.451	1.382	+0.069
+71 25	+70 52	+0 33	1.448	1.409	+0.039
+67 29	+68 49	—1 20	1.393	1.369	+0.024
+77 24	+76 19	+1 5	1.713	1.805	—0.092
+37 36	+41 35	—3 59	1.125	1.14	—0.015
+34 40	+31 55	+2 45	1.238	1.19	+0.048

полюса, если исключить упомянутый в § 13 случай местной аномалии, существование или отсутствие которой теперь еще не установлено. Точное вычисление по нашим элементам дают следующие места этих полюсов:

1) в 73°35' северной широты и 264°21' долготы от Гринича с значением 1.701 полной напряженности в обыкновенных единицах;

2) в 72°35' южной широты, 152°30' долготы с полной напряженностью, равной 2.253.

В первом пункте $\frac{V}{R}$ имеет свое наибольшее значение $\frac{V}{R} = +895.86$, во втором — наименьшее, равное -1030.2 .

По наблюдениям Росса, северный магнитный полюс находится на $3^{\circ}30'$ южнее, нежели по нашему вычислению, которое дает, как видно из таблицы сличений, погрешность в $1^{\circ}12'$ в направлении магнитной силы в этом месте. Для южного магнитного полюса надо ожидать гораздо большей разницы, ибо в Гобарттоуне, как ближайшем к нему месте наблюдений, вычисленное наклонение, без учета знака, на $3^{\circ}38'$ меньше; таким образом, если только положиться на наблюдение, истинное место южного магнитного полюса, вероятно, значительно севернее, нежели дает наше вычисление, и его следовало бы искать примерно в 66° широты и 146° долготы.

§ 31

Хотя обеим точкам земной поверхности, в которых горизонтальная сила пропадает и которые называют магнитными полюсами вследствие их связи с явлениями горизонтальной силы на всей земной поверхности, можно приписать определенное значение, но следует остерегаться придавать этому значению дальнейшее развитие: именно, хорда, соединяющая обе эти точки, не имеет никакого значения, и было бы существенной ошибкой, если именно *этой* прямой дать название магнитной оси земли. Единственный способ, которым правильно устанавливается это общее понятие, есть развитое в § 5 „*Intensitas vis magneticae*“, согласно которому разумеют под магнитною осью такую прямую линию, относительно которой момент свободного магнетизма, содержащегося в теле, есть максимум.

Для определения магнитной оси Земли в этом смысле и одновременно момента земного магнетизма относительно этой оси, согласно сказанному в § 17, необходимо знание лишь членов первого порядка в V . По нашим элементам § 26:

$$P' = 925.782 \cos u + 89.024 \sin u \cos \lambda - 178.744 \sin u \sin \lambda;$$

следовательно,

$$- 925.782 R^3; - 89.024 R^3; + 178.744 R^3$$

суть моменты земного магнетизма относительно земной оси и обоих радиусов, идущих в точки, долготы которых 0 и 90° . У земной оси направление надо принять в сторону северного полюса, и отрицательный знак соответствующего момента показывает, что магнитная ось составляет тупой угол с осью Земли, т. е. магнитный северный полюс обращен к югу. Направление магнитной оси определяется отсюда как параллельное земному диаметру от $77^\circ 50'$ северной широты и $296^\circ 29'$ долготы к $77^\circ 55'$ южной широты и $116^\circ 29'$ долготы, и магнитный момент по отношению к этой оси равен $947.08R^3$. Здесь необходимо помнить, что при наших элементах основною единицею является такая, которая составляет $\frac{1}{1000}$ обычной. Чтобы привести к абсолютным единицам, установленным в „*Intensitas vis magneticae*“, надо заметить, что горизонтальная напряженность в Геттингене 19 июля 1834 г. была найдена равной 1.7748, отсюда при наклонении $68^\circ 1'$ полная напряженность равна 4.7414, тогда как при обычных единицах она считается в 1357; следовательно, множитель для приведения есть 0.0034941, и, следовательно, магнитный момент Земли в абсолютных единицах есть $3.3092R^3$.

Так как в абсолютной мере за единицу длины принят миллиметр, то надо R выразить в миллиметрах, причем ввиду того, что эллиптичностью Земли здесь пренебрежено, достаточно взять R как радиус круга, окружность которого 40 000 миллионов миллиметров; значит, магнитный момент выразится числом, логарифм которого равен 29.93136, иначе 853 800 квадриллионов.

При той же системе единиц магнитный момент однофунтового магнита по опыту, произведенному в 1832 г., равен 100 877 000 (*Intensitas*, § 21); следовательно, магнитный момент Земли в 8464 триллиона раз больше; следовательно, надо было взять 8464 триллионов таких магнитов с параллельными магнитными осями, чтобы воспроизвести магнитное действие Земли во внешнем пространстве, что при равномерном рас-

пределении их по всему объему Земли составило бы почти по 8 (точнее, 7.831) магнитов на каждый кубический метр.

Будучи выражен таким образом, этот результат сохраняет свое значение и в том случае, если Землю рассматривать не как настоящий магнит, а приписать земной магнетизм простым постоянным гальваническим токам.

Если рассматривать Землю как настоящий магнит, то мы вынуждены, во всяком случае в среднем,¹ каждой ее части, равной одной восьмой кубического метра, придать намагничивание, равное такому, которое содержит указанный магнит, — этот результат покажется физикам неожиданным.

§ 32

Действительное распределение магнитных жидкостей в Земле остается по необходимости неопределенным. В самом деле, по одной общей теореме, о которой уже упомянуто в „Intensitas“ § 2 и будет подробно изложено при другом случае, вместо любого распределения магнитных жидкостей внутри некоторого объема всегда можно так распределить магнетизм по поверхности тела, что действие в каждой точке внешнего пространства остается в точности тем же самым, откуда легко заключить, что *одинаковое действие* во всем внешнем пространстве может быть произведено бесчисленным множеством *различных* распределений магнитных жидкостей во внутреннем.

Наоборот, можно задать вполне определенным образом то фиктивное распределение по поверхности земли, которое будет производить во внешнем пространстве силы вполне эквивалентные и притом весьма просто, если Землю считать за шар. Именно, плотность магнитной жидкости в каж-

¹ Мы вовсе не вынуждены считать у всех намагниченных частей Земли оси параллельными. Чем более недостает в таком параллелизме, тем сильнее должно быть среднее намагничивание части, чтобы она дала тот же самый магнитный момент.

дой точке земной поверхности, т. е. количество жидкости, приходящейся на единицу поверхности, будет выражаться формулой

$$\frac{1}{4\pi} \left(\frac{V}{R} - 2Z \right)$$

или, иначе, формулой

$$-\frac{1}{4\pi} \left(3P' + 5P'' + 7P''' + 9P'''' + \dots \right).$$

Значения этой формулы будут представлены далее наглядно графически^[18]; мы заметим здесь, что в северном полушарии они отрицательные, а в южном положительные, так что линия раздела пересекает экватор дважды (под 6 и 186° долготы) и простирается по обе стороны приблизительно до 15° северной и южной широты; затем, что в северной половине находятся *два* минимума, на южной — лишь один максимум. По предварительному вычислению, эти минимумы и максимум находятся:

— 209.1	в 55°	северной широты	и 263°	долготы
— 200.0	„ 71	„	„ 116	„
+ 277.7	„ 70	южной	„ 154	„

Величины выражены в единицах нашего элемента, поэтому их надо еще умножить на 0.0034941, если желательно их перевести в абсолютные меры.

§ 33

Наши элементы должны, как о том уже сказано, служить лишь первым приближением, и как таковое они согласуются по § 29 с наблюдениями удовлетворительно. Нет сомнения, что улучшенный расчет по этим наблюдениям дал бы гораздо лучшее согласие и такое вычисление не представляло бы других затруднений, кроме его длинноты, которая попрежнему остается ужасающе великой, даже если для сокращения

применить, подобно астрономам при вычислении исправлений элементов планетных и кометных орбит, выработанные ими искусственные приемы. Хотя это затруднение легко устраняется, если работу разделить между несколькими вычислителями, нельзя советовать предпринимать такое исправление уже теперь, когда данные во многих существенно важных местах имеют еще столь малую надежность; будет гораздо лучше сперва продолжить сличение элементов с наблюдениями, этим можно будет найти способ придать карте гораздо большую надежность, нежели это было возможно до сих пор, поступая чисто эмпирически. Но пусть нам будет позволено бросить некоторые взгляды на будущие успехи теории, полное осуществление которых, может быть, окажется еще весьма отдаленным.

§ 34

Для более совершенного определения элементов надо поставить к данным наблюдений гораздо более высокие требования, нежели это сделано до сих пор. Они должны бы иметь во всех точках, которыми придется пользоваться, такую точность, которая теперь достигнута лишь для весьма немногих точек; они должны бы быть освобождены от неправильных изменений; они должны бы относиться к одному моменту времени. Еще долго придется ждать, пока эти требования будут удовлетворены, но то, что прежде всего желательно, это *полные* наблюдения (т. е. всех трех элементов) в той или иной точке тех больших пространств, где подобных наблюдений до сих пор совсем не производилось, ибо, на самом деле, вновь введенная точка имеет для общей теории тем большую важность, чем дальше она лежит от других точек, уже находящихся в нашем распоряжении.

После достаточно большого промежутка времени можно будет заново определить элементы для второго момента времени и таким образом получить вековые изменения эле-

ментов; но при этом, очевидно, придется совершенно отказаться от теперешней меры напряженности и брать вместо нее абсолютную.

В течение будущих столетий изменения не будут более представляться равномерными и рассмотрение хода изменений элементов доставит естествоиспытателям неисчерпаемый источник для исследований [19].

§ 35

Будущее время позволит сделать интересные выводы из теории.

В нашей теории принято, что во всякой намагниченной части Земли содержится в точности столько же положительной, сколько и отрицательной жидкости. Если бы магнитные жидкости не имели реального существования, а были бы лишь фиктивной заменой гальванических токов в малейших частицах Земли, то указанное равенство само собою было бы связано с этой заменой; но если считать магнитные жидкости реальностью, то можно, не опасаясь упрека в нелепости, поставить под сомнение равенство количеств обеих жидкостей.

Относительно отдельных магнитных тел (естественных или искусственных магнитов) вопрос о том, есть ли в них избыток той или иной жидкости, может быть решен весьма точными опытами, ибо в первом случае отвес, груз которого состоит из такого тела, показал бы отклонение от вертикали (и притом в плоскости магнитного меридиана). Если подобные опыты над большим числом искусственных магнитов, произведенные в помещении, достаточно удаленном от железа, никогда не покажут малейшего отклонения (как это можно думать), то подобное равенство могло бы быть принято с большою вероятностью и для всей Земли, но, тем не менее, возможность некоторого неравенства не была бы вполне устранена.

В нашу теорию такое неравенство не внесло бы никакого существенного изменения, только P^0 (§ 17) не было

бы более равно нулю. Следствием этого было бы, что во всем бесконечном внешнем пространстве к выражению Z надо бы добавить еще член $\frac{R^2}{r^2}P^0$ и, следовательно, на поверхности земли должен быть добавлен (постоянный) член P^0 , тогда как X и Y не изменились бы. Если в будущем будет произведено гораздо большее количество точных наблюдений, нежели имеется в распоряжении теперь, во всяком случае будет определено, надо ли для их представления ввести исчезающее значение для P^0 или не надо. При теперешнем состоянии данных такое предприятие еще не может иметь никакого успеха.

§ 36

Другая часть нашей теории, относительно которой может возникнуть сомнение, состоит в предположении, что действующее начало земного магнетизма находится исключительно внутри Земли.

Если бы непосредственные причины целиком или отчасти надо было бы искать вне Земли, то, поскольку мы исключаем лишние основания фантазии и придерживаемся исключительно научно известного, можно думать лишь о гальванических токах. Атмосферный воздух не есть проводник таких токов, пустое пространство тоже; наши познания теряются, если мы будем искать носителя гальванических токов в верхних областях. Но загадочные явления северных сияний, при которых, по всей видимости, электричество в движении играет главную роль, воспрепятствуют нам отрицать возможность таких токов только вследствие нашего незнания; во всяком случае, интересно исследовать, как вызванное ими магнитное действие проявилось бы на поверхности земли^[20].

§ 37

Положим, что в пространстве S , заключенном внутри слоя, охватывающего Землю, имеют место постоянные гальванические токи; обозначим через S' все пространство, охва-

ченное через S , и все внешнее пространство, заключающее в себе S и S' , через S'' . Какова бы ни была форма этих токов, всегда можно вместо них взять фиктивное распределение магнитных жидкостей внутри пространства S , и этим фиктивным распределением во всем пространстве S' и S'' будет производиться в точности то же самое действие, как и самими токами. Это важное, уже упомянутое в § 2, предложение основано на том, во-первых, что эти токи могут быть разложены на бесчисленное множество элементарных токов (т. е. таких, которые можно рассматривать как линейные); во-вторых, на известной, насколько мне кажется, впервые Ампером доказанной теореме, что вместо любого линейного тока, ограничивающего любую поверхность, может быть взято распределение магнитных жидкостей на обеих сторонах этой поверхности в бесконечно малом расстоянии от нее, с заранее заданным действием; в-третьих, на очевидной возможности задать для всякой лежащей внутри S замкнутой линии ограниченную ею поверхность, также лежащую целиком внутри S .

Если обозначить через u сумму всех частных, которые произойдут от разделения этих фиктивных элементов магнитной жидкости на расстояния до любой заданной точки O на S' или S'' , причем, как само собою понятно, элементы южной жидкости должны считаться отрицательными, то частные производные от u (совершенно так же, как в нашей теории таковые от V) будут выражать слагающие магнитной силы, производимой гальваническими токами в точке O .

§ 38

Хотя основательное развитие теории, из которой заимствовано предложение предыдущего пункта, откладывается до другого случая, но одно важное предложение, относящееся сюда, заслуживает упоминания. Если две различные поверхности F и F' построены так, что они обе ограничены

тем же самым линейным током G , и если рассматривать для краткости только простейший случай, когда эти поверхности, кроме общей граничной линии, не имеют других общих точек, то эти поверхности ограничивают некоторый объем. Если точка O лежит вне этого объема, то для v , относящегося к G , получится одно и то же значение, — будут ли магнитные жидкости распределены по поверхности F или F' ; именно, это значение будет равно произведению силы гальванического тока G (измеренной в соответствующих единицах) на телесный угол, вершина которого в O и который образован прямыми, проведенными из O к точкам контура G или, что то же самое, на ту часть шаровой поверхности, описанной радиусом 1 из центра O , которая представляет проекцию обеих поверхностей F и F' . Если же O лежит внутри пространства, ограниченного F и F' , то значения обеих частей v , о которых идет речь, будут неравны, смотря по тому, распределяются ли магнитные жидкости по F или по F' , ибо им будут соответствовать различные части упомянутой шаровой поверхности и именно такие, которые дополняют одна другую до целой поверхности шара.

Но в этом случае, вследствие того, что направление тока относительно F и F' противоположно, при умножении силы тока на телесные углы или части шаровой поверхности, им соответствующие, надо приписывать им разные знаки. Следствием этого будет то, что алгебраическая разность обоих значений частей от v будет равна произведению силы тока на всю поверхность шара, т. е. на 4π .

Отсюда легко заключить, что когда O лежит в S'' , то значение v совершенно не зависит от выбора поверхности F и F' , но, напротив, если O находится в S' , абсолютное значение v зависит от этого выбора, но дифференциалы v не зависят.

Здесь затронута весьма плодотворная теорема, согласно которой магнитное действие линейного гальванического тока, равное произведению из его силы на проекцию линии тока

из точки O на поверхность шара, имеет то же значение для притягивающих и отталкивающих сил, получаемых делением масс на их расстояние от точки O ; по своей общности эта теорема заслуживает более подробного рассмотрения, которое пока оставляется до более подробного изложения этого предмета.

§ 39

Значение v , которое в общем случае является функцией от r , u , λ , переходит на поверхности земли в функцию от u и λ , и величины

$$-\frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial u}, \quad -\frac{1}{R} \frac{\partial v}{\sin u \partial \lambda}$$

суть горизонтальные слагающие магнитных сил, происходящие от гальванических токов, направленные на север и на запад. Отсюда ясно, что замечательные теоремы §§ 15 и 16 здесь также имеют место. Но по отношению к третьей слагающей, т. е. к вертикальной магнитной силе, когда действующие массы будут находиться вверху, придется прибегнуть к несколько иному приему, чем для того случая, когда они находятся внутри Земли.

Чтобы получить здесь вертикальную силу, надо сперва рассматривать v как функцию r , u и, одновременно, λ ; затем продифференцировать по r , и после этого положить $r=R$. Но для внутреннего пространства S' , к которому принадлежит и поверхность земли, v разлагается в ряд по возрастающим степеням r .

Если положить

$$\frac{v}{R} = p^0 + \frac{r}{R} p' + \frac{r^2}{R^2} p'' + \frac{r^3}{R^3} p''' + \dots,$$

то p^0 есть величина постоянная, именно значение $\frac{v}{R}$ в центре Земли; p' , p'' , p''' и т. д. суть функции от u и λ , которые удовлетворяют тем же самым дифференциальным уравнениям

в частных производных, как $P', P'', P''', \dots$. Отсюда следует, подобно тому, как в § 20, что знание значений v в каждой точке поверхности земли достаточно, чтобы вывести отсюда общее выражение для всего пространства S' ; что для определения этого значения, за исключением постоянной части, или, что то же, для определения коэффициентов $p', p'', p''', \dots$ достаточно знания горизонтальных сил на поверхности земли, однако значение вертикальной силы на этой поверхности не равно

$$2p' + 3p'' + 4p''' + \dots$$

(каковой эта сила была бы, если бы происходила от масс, находящихся внутри Земли), но оно равно

$$-p' - 2p'' - 3p''' - \dots$$

Так как наши численные значения коэффициентов (§ 26), при предположениях первой формулы, дают весьма удовлетворительное представление совокупности явлений, тогда как эти последние совершенно не сходятся со второй формулой, то непригодность гипотезы о том, что причина земного магнетизма лежит в пространстве вне Земли, может считаться доказанной.

§ 40

Тем не менее еще не может считаться решительно опровергнутой возможность, что *часть* силы земного магнетизма, хотя бы сравнительно весьма малая, производится источниками наверху [21]. Гораздо более полное и гораздо более точное исследование явлений даст в будущем сведения об этом важном пункте теории [22]. Если, в предположении смешанных причин, знаки V, P^0, P', P'' и т. д. v, p^0, p', p'' и т. д. будем разуметь так же, как и раньше, так что первые относятся к причинам, лежащим во внутреннем, последние — во внешнем пространстве, и если затем положим

$$V + v = W; P^0 + p^0 = \Pi^0; P' + p' = \Pi'; P'' + p'' = \Pi'' \text{ и т. д.},$$

то на поверхности земли будет

$$\frac{W}{R} = \Pi^0 + \Pi' + \Pi'' + \dots,$$

причем π'' удовлетворяет тому же дифференциальному уравнению в частных производных, как и P^n (§ 19), и обе слагающие горизонтальной силы выразятся через

$$-\frac{1}{R} \frac{\partial W}{\partial u} \text{ и } -\frac{1}{R \sin u} \frac{\partial W}{\partial \lambda}.$$

Таким образом, и здесь теоремы §§ 15 и 16 остаются справедливыми, и по известным горизонтальным силам могут быть найдены Π' , Π'' , Π''' и т. д., но только из этого нельзя ничего заключить о наличии смешанных причин.

Если рассматривать отдельно вертикальную силу, приведенную к виду

$$Q^0 + Q' + Q'' + Q''' + \dots,$$

так что Q'' удовлетворяет упомянутому дифференциальному уравнению, то будет:

$$Q^0 = p^0; \quad Q' = 2P' - p'; \quad Q'' = 3P'' - 2p''; \quad Q''' = 4P''' - 3p''' \dots$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} 3P' &= \Pi' + Q'; & 3p' &= 2\Pi' - Q' \\ 5P'' &= 2\Pi'' + Q''; & 5p'' &= 3\Pi'' - Q'' \\ 7P''' &= 3\Pi''' + Q'''; & 7p''' &= 4\Pi''' - Q''' \dots \end{aligned}$$

Таким образом, в комбинации горизонтальных сил с вертикальной имеется средство разделить W на его составные части V и v и узнать, составляет ли v заметную часть; лишь постоянную часть v , именно p^0 , наблюдения оставляют совершенно неопределенной, — основание этому становится ясным из § 38.

Следовательно, из этого интересного воззрения становится ясным, что горизонтальная магнитная сила должна рассматриваться отдельно, и в этом заключается еще одно основание для предосторожностей, указанных в § 21.

§ 41

Для исследований, указанных в предыдущем пункте, вероятно, еще долго не будет достаточно данных, но заслуживает внимания то, что изменения магнитной силы, которые одновременно обнаруживаются в различных точках земной поверхности, могут быть подвержены подобному же исследованию и что необходимые для него данные могут быть собраны гораздо ранее; это относится как к правильным изменениям, зависящим от времени дня и года, так и к неправильным; здесь может быть предоставлено место для общих указаний, касающихся этих будущих исследований.

После того как одновременно наблюденные для каждого места изменения слагающих магнитной силы будут приведены к виду ΔX , ΔY , ΔZ , прежде всего придется исследовать, следуют ли изменения обоих слагающих горизонтальной силы нашей теории, согласно которой — ΔX и — $\sin u \Delta Y$ суть частные производные функции от u и λ по этим переменным.

В случае утвердительного ответа можно заключить, что причиною служат или настоящие гальванические токи, или, по крайней мере, действующие подобно им или подобно отдельным магнитным жидкостям. В противоположном случае было бы доказано, что эти причины не являются гальваническими токами.

Таким образом, видно, что знание этих изменений только для горизонтальной силы (при достаточной их точности, числе и распространении) может доставить весьма важные заключения. Но если, кроме того, мы имели бы в своем распоряжении и одновременные изменения вертикальной силы, то в предположении первого случая метод предыдущего пункта дал бы возможность узнать, лежат ли причины выше или ниже поверхности земли; кроме того, поскольку места нахождения этих причин, вероятно, заключаются в слое малой толщины по сравнению со всею Землею, было бы

возможно, по крайней мере приближенно, определить характер их распространения.

Что же касается второго возможного случая, то я полагаю, что по отношению к правильным дневным и годовым изменениям земной магнитной силы его надо считать маловероятным, но по отношению к неправильным изменениям, продолжающимся малое время, в настоящее время не решаюсь высказать какого-либо предположения. Если их источником служат большие перемещения электричества выше атмосферы, то таковые трудно отнести к категории гальванических токов, ибо, хотя все говорит за то, что гальванические токи следует считать за электричество в движении, но не всякое движение электричества есть гальванический ток, а только такое, при котором движение образует замкнутый круговой процесс [23]. Так как лишь в этом предположении возможна многократно упомянутая замена гальванического тока отдельными магнитными жидкостями, то наша гипотеза стала бы непригодной, наши соотношения между слагающими силы стали бы неприемлемыми, т. е. тогда действительно бы наступил второй случай. Уже одно обнаружение этого важного обстоятельства представило бы значительный интерес, но, кроме того, при достаточно распространенных и надежных наблюдениях мы были бы в состоянии обнаружить место и особенности подобного рода перемещений электричества.

Дополнение

В таблице сличения, после ее отпечатания, замечена в двух местах небольшая погрешность, которая для Кальяо произошла от неправильного задания долготы в указанном сочинении, для о. св. Елены — вследствие ошибки в вычислении.

Я пользуюсь этим случаем, чтобы вместе с результатами исправленного вычисления дать здесь еще сличение теории с наблюдениями в восьми местах, о которых я узнал впоследствии.

Наблюдения в Стокгольме произведены Рудбергом (напряженность и наклонение в 1832 г., склонение в 1833 г.) (Poggendorf's Annalen, B. 37).

В Брюсселе наблюдения произведены в 1832 г.: склонение и наклонение по Кетле (Bulletins de l'Académie de Bruxelles, t. VI), напряженность по Рудбергу (вышеприведенное сочинение Сэбайна, стр. 154).

Я обязан любезному сообщению Сэбайна о наблюдениях для других девяти мест, а также об определении напряженности и новом наблюдении наклонения в Кальяо.

Наблюдения в Лервике и Валенсии от 1838 г. произведены капитаном Джемсом Россом; в порте Эч, Панаме и Оау — капитаном Бельчером; в Кальяо в 1838 г. — им же; наконец, в Монреале наклонение и напряженность в 1838 г. были наблюдаемы майором Эскуром, склонение там же в 1834 г. — неизвестным наблюдателем.

Что касается чертежа, который должен служить для наглядности развитого в § 12 исследования, необходимо здесь заметить, что искусный литограф г-н Риттмюллер сделал при этом опыт представления неравномерной напряженности двояким образом — именно через различную толщину линий и через штриховку промежутков.

Благодаря затянувшемуся окончанию печатания настоящего тома оказалось возможным присоединить сюда кроме карты для значений V (§ 30) еще две другие. Первой картой, представляющей *вычисленные* по элементам или из таблиц значения склонений, обязаны читатели моему уважаемому другу, сотруднику по изданию „Результатов“ [24].

Чтобы отчетливее можно было рассмотреть запутанную систему линий равного склонения, с особой тщательностью вычислены точки, где склонение имеет максимальное значение, а также такие точки, где пересекаются две линии одинакового склонения (или одна линия пересекает самое себя); имеется два пункта первого рода и четыре второго; общий

характер таких точек состоит в том, что исчезает первая производная склонения по любому направлению.

Впрочем, излишним является замечание, что в тех местностях, где склонение во все стороны меняется медленно, как в южной и юго-восточной Азии, ничтожные изменения в значениях склонения могут вызвать уже очень большие изменения в конфигурации системы линий.

То же самое справедливо и по отношению к карте полной напряженности, построенной по таблицам доктором Гольдшмидтом [25], где обнаруживаются в северном полушарии две точки максимума и одна точка пересечения, в южном полушарии — одна точка максимума, в средней зоне — две точки минимума и две точки пересечений.

Уже строятся подобные, основанные на теории, карты для наклонения, горизонтальной напряженности и трех составляющих силы земного магнетизма и для такого распределения магнитных жидкостей на поверхности земли, которое явится заменой действительного распределения внутри Земли; мы надеемся их присоединить к следующему тому „Результатов“ [26, 27].

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ТАБЛИЦЫ
для вычисления направления и величины
магнитных сил на поверхности земли
по элементам теории

φ	α°	A'	$\log \alpha'$	A''	$\log \alpha''$	A'''	$\log \alpha'''$	$A'''' = 142^\circ 26'$ $\log \alpha''''$
$+90^\circ$	$+ 0.0$	$292^\circ 9'$	2.07430	$347^\circ 16'$	$-\infty$	$221^\circ 48'$	$-\infty$	$-\infty$
89	10.3	292 4	2.07444	347 15	0.60246	221 48	8.41399	6.04417
88	20.5	291 50	2.07488	347 13	0.90273	221 50	9.01555	6.94686
87	30.8	291 26	2.07563	347 8	1.07753	221 52	9.36689	7.47447
86	41.2	290 52	2.07669	347 2	1.20066	221 54	9.61559	7.84836
85	51.6	290 10	2.07811	346 54	1.29525	221 58	9.80790	8.13790
84	62.1	289 19	2.07990	346 44	1.37159	222 2	9.96441	8.37399
83	72.8	288 20	2.08211	346 32	1.43517	222 8	0.09612	8.57310
82	83.5	287 14	2.08477	346 19	1.48927	222 14	0.20957	8.74509
81	94.3	286 0	2.08791	346 3	1.53601	222 21	0.30901	8.89629
80	105.3	284 41	2.09156	345 45	1.57682	222 29	0.39732	9.03103
79	116.5	283 16	2.09573	345 25	1.61273	222 37	0.47655	9.15241
78	127.8	281 46	2.10046	345 3	1.64451	222 47	0.54824	9.26271
77	139.3	280 13	2.10574	344 39	1.67272	222 57	0.61353	9.36366
76	151.0	278 37	2.11157	344 13	1.69780	223 9	0.67331	9.45660
75	162.9	276 59	2.11794	443 43	1.72012	223 21	0.72831	9.54260
74	175.0	275 20	2.12481	343 12	1.73995	223 34	0.77908	9.62252
73	187.4	273 41	2.13215	342 38	1.75753	223 49	0.82611	9.69707
72	199.9	272 3	2.13991	342 1	1.77302	224 4	0.86977	9.76682
71	212.6	270 25	2.14803	341 20	1.78662	224 20	0.91040	9.83226
70	225.6	268 50	2.15646	340 37	1.79844	224 38	0.94825	9.89381
69	238.9	267 17	2.16512	339 51	1.80860	224 56	0.98357	9.95181
68	252.3	265 46	2.17394	339 1	1.81720	225 16	1.01656	0.00656
67	266.0	274 19	2.18288	338 7	1.82433	225 37	1.04739	0.05833
66	279.9	262 56	2.19183	337 9	1.83005	225 59	1.07620	0.10734
65	294.0	261 36	2.20074	336 6	1.83444	226 22	1.10314	0.15379
64	308.3	260 19	2.20954	334 59	1.83756	226 47	1.12831	0.19786
63	322.8	259 7	2.21816	333 48	1.83947	227 13	1.15183	0.23969
62	337.6	257 58	2.22656	332 30	1.84022	227 40	1.17377	0.27943
61	352.5	256 53	2.23468	331 7	1.83986	228 9	1.19422	0.32720
60	367.6	255 52	2.24246	329 38	1.83845	228 39	1.21325	0.35311
59	382.9	254 55	2.24986	328 3	1.83604	229 11	1.23093	0.38725
58	398.3	254 1	2.25686	326 20	1.83270	229 45	1.24732	0.41972
57	413.9	253 11	2.26339	324 29	1.82850	230 21	1.26246	0.45059
56	429.6	252 24	2.26944	322 30	1.82350	230 58	1.27641	0.47993
55	445.4	251 40	2.27497	320 23	1.81779	231 37	1.28922	9.50781
54	461.3	250 59	2.27996	318 6	1.81148	232 19	1.30091	0.53428
53	477.2	250 21	2.28439	315 39	1.80465	233 2	1.31152	0.55941
52	493.3	249 46	2.28822	313 2	1.79747	233 48	1.32110	0.58323
51	509.3	249 13	2.29145	310 14	1.79005	234 36	1.32967	0.60579
50	525.4	248 43	2.29406	307 14	1.78257	235 26	1.33726	0.62713
49	541.4	248 15	2.29603	304 4	1.77522	236 19	1.34390	0.64728
48	557.4	247 49	2.29734	300 42	1.76818	237 15	1.34960	0.66628
47	573.4	247 25	2.29799	297 8	1.76168	238 14	1.35441	0.68415
46	589.2	247 3	2.29796	293 25	1.75593	239 16	1.35835	0.70092
45	605.0	246 43	2.29724	289 31	1.75115	240 21	1.36143	0.71661

φ	α°	A'	$\log \alpha'$	A''	$\log \alpha''$	A'''	$\log \alpha'''$	$A'''' - 142^\circ 26'$ $\log \alpha''''$
+45°	+605.0	246°43'	2.29724	289°31'	1.75115	240°21'	1.36143	0.71661
44	620.7	246 24	2.29581	285 30	1.74752	241 30	1.36369	0.73124
43	636.2	246 6	2.29367	281 22	1.74521	242 43	1.36514	0.74483
42	651.5	245 49	2.29080	277 9	1.74436	243 59	1.36581	0.75740
41	666.6	245 34	2.28719	272 54	1.74504	245 19	1.36574	0.76895
40	681.5	245 19	2.28282	268 38	1.74726	246 44	1.36494	0.77950
39	696.2	245 5	2.27770	264 24	1.75098	248 13	1.36344	0.78905
38	710.6	244 52	2.27179	260 15	1.75611	249 47	1.36129	0.79761
37	724.7	244 39	2.26510	256 10	1.76251	251 26	1.35850	0.80518
36	738.5	244 25	2.25760	252 13	1.77000	253 11	1.35513	0.81176
35	752.0	244 12	2.24928	248 23	1.77838	255 1	1.35122	0.81735
34	765.2	243 58	2.24012	244 43	1.78746	256 57	1.34681	0.82195
33	777.9	243 44	2.23010	241 11	1.79704	258 59	1.34196	0.82555
32	790.3	243 28	2.21920	237 49	1.80692	261 8	1.33672	0.82814
31	802.3	243 10	2.20742	234 36	1.81694	263 23	1.33116	0.82970
30	813.9	242 51	2.19471	231 32	1.82693	265 45	1.32535	0.83023
29	825.0	242 30	2.18107	228 35	1.83676	268 13	1.31937	0.82970
28	835.7	242 5	2.16647	225 47	1.84632	270 49	1.31330	0.82808
27	845.9	241 37	2.15089	223 6	1.85551	273 31	1.30722	0.82536
26	855.7	241 4	2.13431	220 31	1.86425	276 21	1.30123	0.82149
25	864.9	240 26	2.11671	218 2	1.87248	279 17	1.29542	0.81644
24	873.7	239 41	2.09807	215 38	1.88014	282 19	1.28988	0.81017
23	882.0	238 49	2.07839	213 18	1.88721	285 28	1.28470	0.80263
22	889.8	237 49	2.05768	211 3	1.89364	288 42	1.27997	0.79374
21	897.0	236 37	2.03595	208 51	1.89942	292 1	1.27576	0.78345
20	903.8	235 13	2.01326	206 42	1.90455	295 24	1.27214	0.77168
19	910.0	233 35	1.98970	204 35	1.90900	298 50	1.26916	0.75832
18	915.8	231 39	1.96540	202 30	1.91277	302 19	1.26686	0.74327
17	921.0	229 23	1.94057	200 26	1.91588	305 50	1.26524	0.72639
16	925.7	226 45	1.91553	198 23	1.91832	309 21	1.26430	0.70753
15	929.8	223 41	1.89072	196 21	1.92011	312 52	1.26403	0.68650
14	933.5	220 9	1.86675	194 18	1.92126	316 22	1.26438	0.66306
13	936.7	216 7	1.84438	192 15	1.92179	319 51	1.26530	0.63693
12	939.4	211 35	1.82457	190 12	1.92170	323 17	1.26672	0.60776
11	941.6	206 34	1.80835	188 7	1.92104	326 41	1.26859	0.57511
10	943.3	201 12	1.79678	186 1	1.91982	330 1	1.27080	0.53839
9	944.6	195 33	1.79064	183 53	1.91806	333 19	1.27328	0.49686
8	945.4	189 50	1.79046	181 43	1.91581	336 32	1.27595	0.44948
7	945.7	184 15	1.79621	179 31	1.91309	339 43	1.27873	0.39482
6	945.7	178 56	1.80737	177 16	1.90995	342 49	1.28156	0.33075
5	945.2	174 3	1.82310	174 59	1.90641	345 53	1.28435	0.25400
4	944.3	169 39	1.84235	172 38	1.90253	348 54	1.28706	0.15908
3	943.0	165 47	1.86409	170 15	1.89835	351 51	1.28963	0.03568
2	941.4	162 26	1.88741	167 48	1.89392	354 47	1.29201	9.86069
1	939.4	159 34	1.91156	165 17	1.88929	357 40	1.29418	9.56033
0	937.1	157 9	1.93596	162 43	1.88452	0 31	1.29611	— ∞

φ	a°	A'	$\log a'$	A''	$\log a''$	A'''	$\log a'''$	$A'''' = 322^\circ 26'$ $\log a''''$
0°	+937.1	$157^\circ 9'$	1.93596	$162^\circ 43'$	1.88452	$0^\circ 31'$	1.29611	— ∞
— 1	934.5	155 7	1.96018	160 6	1.87966	3 21	1.29778	9.56033
2	931.5	153 26	1.98393	157 25	1.87476	6 10	1.29918	9.86069
3	928.3	152 3	2.00702	154 41	1.86989	8 58	1.30030	0.03568
4	924.8	150 55	2.02930	151 54	1.86509	11 46	1.30115	0.15908
5	921.0	150 0	2.05070	149 4	1.86042	14 34	1.30175	0.25400
6	917.0	149 16	2.07116	146 11	1.85592	17 22	1.30211	0.33075
7	912.8	148 41	2.09068	143 17	1.85164	20 11	1.30226	0.39482
8	908.4	148 14	2.10923	140 20	1.84762	23 0	1.30223	0.44948
9	903.8	147 54	2.12683	137 22	1.84388	25 51	1.30205	0.49686
10	899.1	147 39	2.14348	134 23	1.84045	28 43	1.30176	0.53839
11	894.1	147 28	2.15919	131 23	1.83733	31 36	1.30140	0.57511
12	889.1	147 22	2.17398	128 24	1.83452	34 30	1.30103	0.60776
13	883.9	147 18	2.18785	125 25	1.83203	37 26	1.30068	8.63693
14	878.6	147 16	2.20083	122 27	1.82983	40 23	1.30041	0.66306
15	873.2	147 16	2.21292	119 31	1.82790	43 21	1.30025	0.68650
16	867.7	147 18	2.22413	116 36	1.82621	46 20	1.30026	0.70753
17	862.1	147 19	2.23446	113 44	1.82470	49 19	1.30047	0.72639
18	856.4	147 22	2.24391	110 54	1.82335	52 19	1.30091	0.74327
19	850.7	147 24	2.25250	108 7	8.82211	55 18	1.30160	0.75832
20	844.9	147 25	2.26022	105 23	1.82091	58 16	1.30258	0.77168
21	839.1	147 26	2.26706	102 43	1.81971	61 14	1.30384	0.78345
22	833.2	147 25	2.27302	100 5	1.81846	64 9	1.30539	0.79374
23	827.3	147 23	2.27809	97 30	1.81710	67 3	1.30722	0.80263
24	821.4	147 19	2.28227	94 59	1.81560	69 54	1.30931	0.81017
25	815.4	147 13	2.28554	92 31	1.81388	72 42	1.31164	0.81644
26	809.3	147 4	2.28790	90 5	1.81193	75 27	1.31417	0.82149
27	803.2	146 52	2.28932	87 43	1.80968	78 8	1.31685	0.82536
28	797.1	146 37	2.28978	85 23	1.80711	80 45	1.31964	0.82808
29	790.9	146 18	2.28928	83 5	1.80419	83 17	1.32249	0.82970
30	784.7	145 55	2.28780	80 50	1.80087	85 45	1.32535	0.83023
31	778.5	145 27	2.28530	78 36	1.79714	88 7	1.32816	0.82970
32	772.1	144 54	2.28177	76 25	1.79296	90 25	1.33087	0.82814
33	765.7	144 15	2.27720	74 14	1.78834	92 38	1.33340	0.82555
34	759.3	143 30	2.27156	72 5	1.78323	94 46	1.33572	0.82195
35	752.7	142 37	2.26483	69 57	1.77765	96 49	1.33776	0.81735
36	746.1	141 36	2.25701	67 49	1.77157	98 46	1.33947	0.81176
37	739.3	140 25	2.24809	65 42	1.76499	100 39	1.34081	0.80518
38	732.5	139 4	2.23808	63 35	1.75791	102 27	1.34172	0.79761
39	725.5	137 30	2.22701	61 27	1.75034	104 10	7.34215	0.78905
40	718.4	135 43	2.21492	59 19	1.74228	105 49	1.34208	0.77950
41	711.1	133 40	2.20190	57 10	1.73373	107 24	1.34145	0.76895
42	703.7	131 20	2.18809	55 0	1.72472	108 54	1.34022	0.75740
43	696.0	128 39	2.17367	52 49	1.71526	110 20	1.33836	0.74483
44	688.2	125 37	2.15891	50 37	1.70537	111 42	1.33584	0.73124
45	680.2	122 10	2.14420	48 23	1.69506	113 0	1.33262	0.71661

φ	α°	A'	$\log \alpha'$	A''	$\log \alpha''$	A'''	$\log \alpha'''$	$A'''' = 322^\circ 26'$ $\log \alpha''''$
—45°	+680.2	122°10'	2.14420	48°23'	1.69506	113° 0'	1.33262	0.71661
46	672.0	118 16	2.13005	46 7	1.68438	114 15	1.32867	0.70092
47	663.5	113 56	2.11708	43 49	1.67335	115 26	1.32395	0.68415
48	654.8	109 7	2.10605	41 29	1.66199	116 34	1.31844	0.66626
49	645.9	103 53	2.09781	39 7	1.65036	117 39	1.31210	0.64728
50	636.7	98 16	2.09320	36 42	1.63848	118 40	1.30491	0.62713
51	627.2	92 24	2.09289	34 16	1.62640	119 39	1.29681	0.60579
52	617.3	86 25	2.09739	31 47	1.61415	120 35	1.28780	0.58323
53	607.2	80 27	2.10679	29 17	1.60177	121 28	1.27783	0.55941
54	596.8	74 40	2.12081	26 45	1.58929	122 19	1.26686	0.53428
55	586.0	69 11	2.13887	24 11	1.57675	123 7	1.25486	0.50781
56	574.9	64 5	2.16018	21 37	1.56417	123 53	1.24178	0.47993
57	563.5	59 25	2.18391	19 2	1.55158	124 37	1.22759	0.45059
58	551.7	55 12	2.20923	16 26	1.53898	125 19	1.21223	0.41979
59	539.6	51 25	2.23544	13 51	1.52638	125 59	1.19566	0.38725
60	527.0	48 4	2.26198	11 17	1.51376	126 36	1.17782	0.35311
61	514.1	45 4	2.28840	8 44	1.50111	127 12	1.15865	0.31720
62	500.9	42 26	2.31436	6 13	1.48839	127 46	1.13808	0.27943
63	487.2	40 5	2.33963	3 45	1.47556	128 19	1.11603	0.23969
64	473.2	38 1	2.36405	1 20	1.46254	128 49	1.09244	0.19786
65	458.8	36 10	2.38751	358 58	1.44928	129 18	1.06719	0.15379
66	444.0	34 32	2.40996	356 40	1.43567	129 46	1.04019	0.10734
67	428.9	33 5	2.43134	354 27	1.42163	130 12	1.01132	0.05833
68	413.3	31 47	2.45165	352 19	1.40704	130 36	0.98045	0.00656
69	397.4	30 37	2.47088	350 15	1.39176	130 59	0.94743	9.95181
70	381.2	29 35	2.48904	348 18	1.37567	131 21	0.91208	9.89381
71	364.6	28 40	2.50615	346 25	1.35860	131 42	0.87421	9.83226
72	347.6	27 50	2.52223	344 39	1.34039	132 1	0.83357	9.76682
73	330.3	27 5	2.53729	342 59	1.32084	132 19	0.78990	9.69707
74	312.7	26 25	2.55136	341 25	1.29975	132 36	0.74286	9.62252
75	294.8	25 49	2.56447	339 56	1.27687	132 52	0.69208	9.54260
76	276.6	25 17	2.57662	338 34	1.25192	133 7	0.63709	9.45660
77	258.1	24 48	2.58784	337 18	1.22457	133 20	0.57730	9.36366
78	239.3	24 23	2.59816	336 8	1.19443	133 32	0.51202	9.26271
79	220.3	24 0	2.60758	335 4	1.16100	133 44	0.44034	9.15241
80	201.0	23 40	2.61613	334 5	1.12370	133 54	0.36110	9.03103
81	181.6	23 22	2.62382	333 13	1.08172	134 3	0.27280	8.89629
82	161.9	23 7	2.63067	332 26	1.03401	134 11	0.17337	8.74509
83	142.1	22 53	2.63668	331 45	0.97911	134 19	0.05992	8.57310
84	122.1	22 42	2.64187	331 10	0.91487	134 25	9.92822	8.37399
85	101.9	22 32	2.64624	330 40	0.83802	134 30	9.77171	8.13790
86	81.7	22 25	2.64981	330 16	0.74302	134 34	9.57941	7.84836
87	61.3	22 19	2.65258	329 57	0.61958	134 38	9.33071	7.47447
88	40.9	22 15	2.65456	329 44	0.44456	134 40	8.97937	6.94686
89	20.5	22 12	2.65574	329 35	0.14417	134 41	8.37781	6.04417
90	0	22 11	2.65614	329 33	— ∞	134 42	— ∞	— ∞

φ	B'	$\log b'$	B''	$\log b''$	B'''	$\log b'''$	$B'''' - 232^{\circ}26'$ $\log b''''$
$+90^{\circ}$	$22^{\circ} 9'$	2.07430	$77^{\circ}16'$	$-\infty$	$311^{\circ}48'$	$-\infty$	$-\infty$
89	22 7	2.07437	77 16	0.60263	311 48	8.41408	6.04423
88	22 2	2.07458	77 15	0.90333	311 49	9.01591	6.94713
87	21 54	2.07493	77 12	1.07889	311 50	9.36770	7.47507
86	21 43	2.06543	77 9	1.20311	311 52	9.61702	7.84942
85	21 29	2.07607	77 5	1.29903	311 54	9.81013	8.13956
84	21 11	2.07686	77 0	1.37704	311 57	9.96763	8.37637
83	20 51	2.07781	76 55	1.44260	312 0	0.10050	8.57685
82	20 28	2.07891	76 48	1.49899	312 3	0.21530	8.74933
81	20 2	2.08017	76 40	1.54833	312 8	0.31627	8.90167
80	19 33	2.08160	76 32	1.59206	312 12	0.40629	9.03768
79	19 2	2.08320	76 22	1.63121	312 17	0.48742	9.16047
78	18 28	2.08498	76 12	1.66655	312 23	0.56119	9.27231
77	17 52	2.08693	76 0	1.69865	312 29	0.62875	9.37493
76	17 14	2.08906	75 48	1.72795	312 36	0.69100	9.46969
75	16 34	2.09138	75 35	1.75483	312 43	0.74864	9.55766
74	15 52	2.09388	75 20	1.77955	312 50	0.80226	9.63968
73	15 9	2.09658	75 5	1.80237	312 59	0.85232	9.71647
72	14 24	2.09945	74 49	1.82347	313 7	0.89922	9.78862
71	13 37	2.10252	74 31	1.84301	313 17	0.94327	9.85659
70	12 50	2.10577	74 13	1.86114	313 26	0.98476	9.92082
69	12 2	2.10920	73 53	1.87798	313 37	1.02392	9.98166
68	11 13	2.11280	73 32	1.89362	313 48	1.06095	0.03940
67	10 24	2.11658	73 11	1.90815	313 59	1.09603	0.09430
66	9 34	2.12052	72 48	1.92165	314 11	1.12930	0.14661
65	8 44	2.12461	72 24	1.93420	314 23	1.16091	0.19651
64	7 55	2.12885	71 58	1.94584	314 37	1.19098	0.24419
63	7 5	2.13322	71 32	1.95663	314 50	1.21961	0.28981
62	6 15	2.13772	71 4	1.96663	315 5	1.24689	0.33350
61	5 26	2.14232	70 35	1.97587	315 20	1.27290	0.37538
60	4 38	2.14703	70 4	1.98440	315 35	1.29773	0.41558
59	3 50	2.15183	69 33	1.99224	315 51	1.32144	0.45419
58	3 3	2.15669	69 0	1.99944	316 8	1.34409	0.49130
57	2 17	2.16162	68 25	2.00602	316 26	1.36574	0.52700
56	1 32	2.16659	67 49	2.01200	316 44	1.38644	0.56135
55	0 48	2.17159	67 12	2.01743	317 3	1.40624	0.59444
54	0 5	2.17661	66 33	2.02232	317 22	1.42517	0.62633
53	359 23	2.18164	65 52	2.02669	317 42	1.44329	0.65706
52	358 43	2.18666	65 10	2.03056	318 3	1.46062	0.68669
51	358 3	2.19166	64 26	2.03396	318 25	1.47720	0.71528
50	357 25	2.19662	63 41	2.03690	318 47	1.49306	0.74287
49	356 49	2.20155	62 54	2.03941	319 10	1.50823	0.76950
48	356 13	2.20641	62 5	2.04151	319 34	1.52274	0.79520
47	355 39	2.21121	61 14	2.04320	319 58	1.53661	0.82002
46	355 6	2.21593	60 22	2.04451	320 24	1.54987	0.84398
45	354 34	2.22057	59 27	2.04545	320 50	1.56254	0.86712

φ	B'	$\log b'$	B''	$\log b''$	B'''	$\log b'''$	$B'''' = 232^{\circ}26'$ $\log b''''$
$+45^{\circ}$	$354^{\circ}34'$	2.22057	$59^{\circ}27'$	2.04545	$320^{\circ}50'$	1.56254	0.86712
44	354 4	2.22512	58 31	2.04605	321 17	1.57464	0.88947
43	353 35	2.22956	57 33	2.04632	321 44	1.58619	0.91105
42	353 7	2.23389	56 33	2.04627	322 13	1.59721	0.93189
41	352 40	2.23811	55 30	2.04592	322 42	1.60771	0.95201
40	352 14	2.24221	54 26	2.04530	323 13	1.61772	0.97143
39	351 50	2.24618	53 20	2.04441	323 44	1.62725	0.99018
38	351 26	2.25002	52 12	2.04328	324 16	1.63631	1.00827
37	351 4	2.25372	51 1	2.04191	324 49	1.64493	1.02571
36	350 43	2.25728	49 49	2.04034	325 23	1.65311	1.04254
35	350 22	2.26071	48 34	2.03857	325 57	1.66087	1.05876
34	350 3	2.26398	47 17	2.03662	326 33	1.66822	1.07439
33	349 44	2.26711	45 28	2.03452	327 9	1.67518	1.08944
32	349 27	2.27009	44 37	2.03228	327 47	1.68175	1.10393
31	349 10	2.27292	43 14	2.02991	328 25	1.68796	1.11786
30	348 54	2.27560	41 49	2.02744	329 5	1.69380	1.13126
29	348 38	2.27813	40 22	2.02488	329 45	1.69930	1.14413
28	348 23	2.28052	38 53	2.02226	330 27	1.70446	1.15647
27	348 9	2.28275	37 22	2.01958	331 9	1.70930	1.16831
26	347 55	2.28483	35 50	2.01686	331 52	1.71382	1.17965
25	347 41	2.28677	34 15	2.01413	332 37	1.71804	1.19050
24	347 28	2.28856	32 39	2.01139	333 22	1.72197	1.20086
23	347 15	2.29021	31 1	2.00866	334 8	1.72561	1.21075
22	347 3	2.29171	29 22	2.00595	334 56	1.72898	1.22017
21	346 50	2.29309	27 41	2.00328	335 44	1.73208	1.22912
20	346 38	2.29433	26 0	2.00065	336 33	1.73493	1.23763
19	346 26	2.29544	24 17	1.99808	337 23	1.73754	1.24568
18	346 14	2.29642	22 33	1.99557	338 14	1.73991	1.25329
17	346 2	2.29728	20 48	1.99313	339 6	1.74206	1.26046
16	345 49	2.29802	19 3	1.99077	339 59	1.74399	1.26719
15	345 36	2.29865	17 17	1.98848	340 53	1.74570	1.27370
14	345 23	2.29917	15 31	1.98626	341 48	1.74722	1.27938
13	345 10	2.29958	13 44	1.98413	342 43	1.74855	1.28484
12	344 56	2.29990	11 57	1.98207	343 40	1.74969	1.28988
11	344 42	2.30014	10 11	1.98007	344 37	1.75065	1.29451
10	344 27	2.30028	8 24	1.97815	345 35	1.75145	1.29872
9	344 11	2.30035	6 38	1.97629	346 33	1.75208	1.30253
8	343 55	2.30035	4 52	1.97446	347 32	1.75255	1.30593
7	343 37	2.30029	3 7	1.97268	348 32	1.75287	1.30892
6	343 19	2.30018	1 22	1.97092	349 33	1.75305	1.31151
5	343 0	2.30002	359 37	1.96919	350 34	1.75309	1.31370
4	342 40	2.29983	357 54	1.96746	351 35	1.75299	1.31549
3	342 18	2.29961	356 11	1.96573	352 37	1.75276	1.31688
2	341 56	2.29938	354 29	1.96397	353 39	1.75241	1.31788
1	341 32	2.29914	352 48	1.96218	354 42	1.75193	1.31847
0	341 7	2.29890	351 8	1.96035	355 45	1.75132	1.31867

φ	B'	$\log b'$	B''	$\log b''$	B'''	$\log b'''$	$B'''' - 232^{\circ}26'$ $\log b''''$
0°	341° 7'	2.29890	351° 8'	1.96035	355°45'	1.75132	1.31867
1	340 40	2.29869	349 29	1.95846	356 47	1.75060	1.31847
2	340 12	2.29850	347 50	1.95649	357 51	1.74976	1.31788
3	339 42	2.29836	346 13	1.95444	358 54	1.74880	1.31688
4	339 11	2.29827	344 36	1.95228	359 57	1.74772	1.31549
5	338 38	2.29824	343 1	1.95002	1 0	1.74652	1.31370
6	338 3	2.29830	341 26	1.94764	2 3	1.74520	1.31151
7	337 27	2.29846	339 53	1.94512	3 6	1.74376	1.30892
8	336 49	2.29873	338 20	1.94246	4 9	1.74219	1.30593
9	336 10	2.29912	336 47	1.93964	5 11	1.74049	1.30253
10	335 29	2.29965	335 16	1.93667	6 13	1.73867	1.29872
11	334 46	2.30033	333 45	1.93352	7 14	1.73670	1.29451
12	334 1	2.30118	332 14	1.93020	8 15	1.73460	1.28988
13	333 15	2.30222	330 45	1.92669	9 16	1.73234	1.28484
14	332 27	2.30345	329 15	1.92299	10 16	1.72994	1.27938
15	331 37	2.30489	327 47	1.91910	11 15	1.72737	1.27350
16	330 47	2.30655	326 18	1.91501	12 14	1.72464	1.26719
17	329 54	2.30845	324 50	1.91071	13 12	1.72174	1.26046
18	329 1	2.31059	323 22	1.90621	14 9	1.71865	1.25329
19	328 6	2.31298	321 54	1.90150	15 6	1.71537	1.24568
20	327 11	2.31564	320 26	1.89658	16 1	1.71189	1.23763
21	326 14	2.31856	318 58	1.89145	16 56	1.70820	1.22912
22	325 16	2.32176	317 30	1.88612	17 50	1.70430	1.22017
23	324 18	2.32523	316 2	1.88057	18 43	1.70017	1.21075
24	323 20	2.32899	114 34	1.87483	19 35	1.69580	1.20086
25	322 21	2.33302	313 5	1.86887	20 27	1.69118	1.19050
26	321 22	2.33733	311 37	1.86272	21 17	1.68630	1.17965
27	320 22	2.34191	310 8	1.85637	22 6	1.68115	1.16831
28	319 23	2.34675	308 38	1.84983	22 54	1.67572	1.15647
29	318 24	2.35186	307 8	1.84311	23 42	1.67000	1.14413
30	317 25	2.35722	305 38	1.83621	24 28	1.66398	1.13126
31	316 27	2.36281	304 7	1.82913	25 13	1.65763	1.11787
32	315 30	2.36863	302 35	1.82188	25 58	1.65096	1.10393
33	314 33	2.37467	301 3	1.81447	26 41	1.64395	1.08944
34	313 37	2.38091	299 31	1.80690	27 23	1.63658	1.07439
35	312 42	2.38733	297 58	1.79919	28 4	1.62884	1.05876
36	311 48	2.39392	296 25	1.79134	28 45	1.62072	1.04254
37	310 56	2.40066	294 51	1.78335	29 24	1.61220	1.02571
38	310 4	2.40754	293 16	1.77524	30 2	1.60327	1.00827
39	309 14	2.41454	291 41	1.76701	30 40	1.59391	0.99018
40	308 25	2.42163	290 6	1.75866	31 16	1.58411	0.97143
41	307 37	2.42882	288 31	1.75020	31 51	1.57385	0.95201
42	306 51	2.43606	286 55	1.74163	32 26	1.56312	0.93189
43	306 6	2.44336	285 19	1.73297	32 59	1.55188	0.91105
44	305 23	2.45069	283 43	1.72420	33 31	1.54014	0.88947
45	304 41	2.45804	282 7	1.71533	34 3	1.52785	0.86712

φ	B'	$\log b'$	B''	$\log b''$	B'''	$\log b'''$	$B'''' = 232^{\circ}26'$ $\log b''''$
—45°	304°41'	2.45804	282° 7'	1.71533	34° 3'	1.52785	0.86712
46	304 1	2.46539	280 31	1.70636	34 34	1.51502	0.84398
47	303 22	2.47272	278 56	1.69729	35 3	1.50161	0.82002
48	302 44	2.48003	277 21	1.68810	35 32	1.48759	0.79520
49	302 8	2.48730	275 47	1.67880	36 0	1.47296	0.76950
50	301 33	2.49451	274 13	1.66937	36 27	1.45767	4.74287
51	301 0	2.50166	272 40	1.65981	36 54	1.44170	0.71528
52	300 28	2.50873	271 8	1.65009	37 19	1.42502	0.68669
53	299 57	2.51571	269 37	1.64021	37 44	1.40761	0.65706
54	299 28	2.52260	268 7	1.63013	38 7	1.38942	0.62633
55	299 0	2.52937	266 39	1.61985	38 30	1.37041	0.59444
56	298 33	2.53603	265 12	1.60933	38 53	1.35055	0.56135
57	298 7	2.54256	263 47	1.59855	39 14	1.32980	0.52700
58	297 43	2.54895	262 23	1.58747	39 35	1.30810	0.49130
59	297 20	2.55521	261 2	1.57607	39 54	1.28541	0.45419
60	296 57	2.56131	259 42	1.56430	40 14	1.26166	0.41558
61	296 36	2.56727	258 25	1.55212	40 32	1.23680	0.37538
62	296 16	2.57306	257 9	1.53949	40 50	1.21076	0.33350
63	295 57	2.57868	255 56	1.52635	41 6	1.18346	0.28981
64	295 39	2.58413	254 46	1.51265	41 23	1.15481	0.24419
65	295 22	2.58941	253 37	1.49834	41 38	1.12473	0.19651
66	295 5	2.59451	252 31	1.48335	41 53	1.09311	0.14661
67	294 50	2.59942	251 28	1.46760	42 7	1.05982	0.09430
68	294 35	2.60415	250 27	1.45101	42 21	1.02473	0.03940
69	294 22	2.60868	249 29	1.43351	42 34	0.98770	9.98166
70	294 9	2.61302	248 34	1.41498	42 46	0.94854	9.92082
71	293 57	2.61716	247 41	1.39531	42 57	0.90705	9.85659
72	293 45	2.62111	246 51	1.37437	43 8	0.86299	9.78862
73	293 35	2.62485	246 3	1.35202	43 19	0.81610	9.71647
74	293 25	2.62839	245 18	1.32808	43 28	0.76604	9.63968
75	293 16	2.63172	244 36	1.30235	43 37	0.71242	9.55766
76	293 7	2.63484	243 57	1.27458	43 46	0.65478	9.46969
77	292 59	2.63776	243 21	1.24448	43 53	0.59254	9.37493
78	292 53	2.64046	242 47	1.21167	44 1	0.52498	9.27231
79	292 45	2.64296	242 16	1.17572	44 7	0.45122	9.16047
80	292 39	2.64524	241 47	1.13602	44 13	0.37009	9.03768
81	292 34	2.64730	241 22	1.09181	44 19	0.28007	8.90167
82	292 29	2.64915	240 59	1.04207	44 24	0.17911	8.74933
83	292 25	2.65079	240 39	0.98533	44 28	0.06431	8.57635
84	292 21	2.65220	240 21	0.91948	44 32	9.93144	8.37637
85	292 18	2.65340	240 6	0.84123	44 35	9.77395	8.13956
86	292 16	2.65439	239 54	0.74509	44 37	9.58084	7.84942
87	292 14	2.65515	239 45	0.62075	44 39	9.33151	7.47507
88	292 13	2.65570	239 38	0.44509	44 41	8.94136	6.94713
89	292 12	2.65603	239 34	0.14432	44 42	8.33933	6.04423
90	292 11	2.65614	239 33	— ∞	44 42	— ∞	— ∞

φ	c°	C'	$\log c'$	C''	$\log c''$	C'''	$\log c'''$	$C'''' = 322^\circ 26'$ $\log c''''$
$+90^\circ$	$+1652.9$	$172^\circ 29'$	$-\infty$	$176^\circ 59'$	$-\infty$	$36^\circ 0'$	$-\infty$	$-\infty$
89	1652.8	172 27	0.72139	176 59	9.17222	36 0	6.83649	4.38300
88	1652.7	172 20	1.02153	176 58	9.77385	36 1	7.73926	5.58686
87	1652.4	172 8	1.19615	176 56	0.12532	36 2	8.26700	6.29078
86	1652.1	171 51	1.31904	176 53	0.37419	36 4	8.64106	6.78992
85	1651.7	171 30	1.41333	176 49	0.56672	36 6	8.93082	7.17676
84	1651.1	171 3	1.48952	176 45	0.72351	36 8	9.16719	7.49252
83	1650.5	170 31	1.55192	176 40	0.83554	36 11	9.36663	7.75916
82	1649.7	169 54	1.60623	176 34	0.96937	36 15	9.53899	7.98980
81	1648.8	169 11	1.65259	176 27	1.06923	36 19	6.69062	8.19291
80	1647.7	168 22	1.69305	176 19	1.15802	36 23	9.82585	8.37426
79	1646.4	167 28	1.72868	176 10	2.23779	36 28	9.94777	8.53797
78	1645.0	166 27	1.76027	176 1	1.31006	36 34	0.05867	8.68709
77	1643.3	165 20	1.78844	175 50	1.37599	36 40	0.16026	8.82393
76	1641.4	164 6	1.81369	175 39	1.43647	36 46	0.25391	8.95028
75	1639.3	162 45	1.83641	175 27	1.49222	36 53	0.34068	9.06756
74	1637.0	161 16	1.85697	175 14	1.54381	37 1	0.42143	9.17693
73	1634.3	159 41	1.87567	175 0	1.59171	37 9	0.49686	9.27932
72	1631.3	157 57	1.89278	174 45	1.63630	37 17	0.56756	9.37551
71	1628.0	156 6	1.90856	174 29	1.67772	37 26	0.63402	9.46615
70	1624.4	154 6	1.92325	174 12	1.71684	37 36	0.69664	9.55179
69	1620.3	151 59	1.93709	173 54	1.75329	37 46	0.75579	9.63290
68	1615.9	149 44	1.95028	173 35	1.78747	37 57	0.81266	9.70988
67	1611.0	147 21	1.96304	173 14	1.81956	38 8	0.86482	9.78309
66	1605.7	144 51	1.97558	172 53	1.84971	38 20	0.91520	9.85283
65	1600.0	142 15	1.98809	172 31	1.87806	38 32	0.96309	9.91937
64	1593.7	139 33	2.00074	172 7	1.90472	38 45	1.00868	9.98295
63	1586.9	136 46	2.01369	171 42	1.92979	38 59	1.05213	0.04377
62	1579.6	133 55	2.02708	171 16	1.95338	39 13	1.09356	0.10202
61	1571.7	131 2	2.04101	170 48	1.97557	39 28	1.13312	0.15786
60	1563.2	128 8	2.05556	170 20	1.99642	39 43	1.17090	0.21146
59	1554.1	125 15	2.07077	169 50	2.01601	39 59	1.20702	0.26294
58	1544.4	122 22	2.08665	169 18	2.03440	40 16	1.24157	0.31242
57	1534.0	119 33	2.10318	168 45	2.00165	40 34	1.27462	0.36001
56	1523.0	116 48	2.12032	168 10	2.06780	40 52	1.30626	0.40583
55	1511.2	114 8	2.13799	167 34	2.08291	41 11	1.33655	0.44994
54	1498.9	111 35	2.15610	166 56	2.09694	41 30	1.36556	0.49245
53	1485.8	109 7	2.17456	166 17	2.21015	41 51	1.39345	0.53343
52	1471.9	106 47	2.19326	165 35	2.12237	42 12	1.41996	0.57295
51	1457.4	104 34	2.21210	164 52	2.13370	42 34	1.44546	0.61107
50	1442.1	102 29	2.23098	164 7	2.14417	42 57	1.46990	0.64787
49	1426.0	100 32	2.24979	163 20	2.15372	43 20	1.49327	0.68335
48	1409.2	98 42	2.26848	162 31	2.16267	43 45	1.51567	0.71762
47	1391.6	96 59	2.28692	161 40	2.17076	44 10	1.53711	0.75071
46	1373.2	94 24	2.30508	160 47	2.17810	44 36	1.55764	0.78266
45	1354.1	93 56	2.32288	159 51	2.18474	45 3	1.57728	0.81352

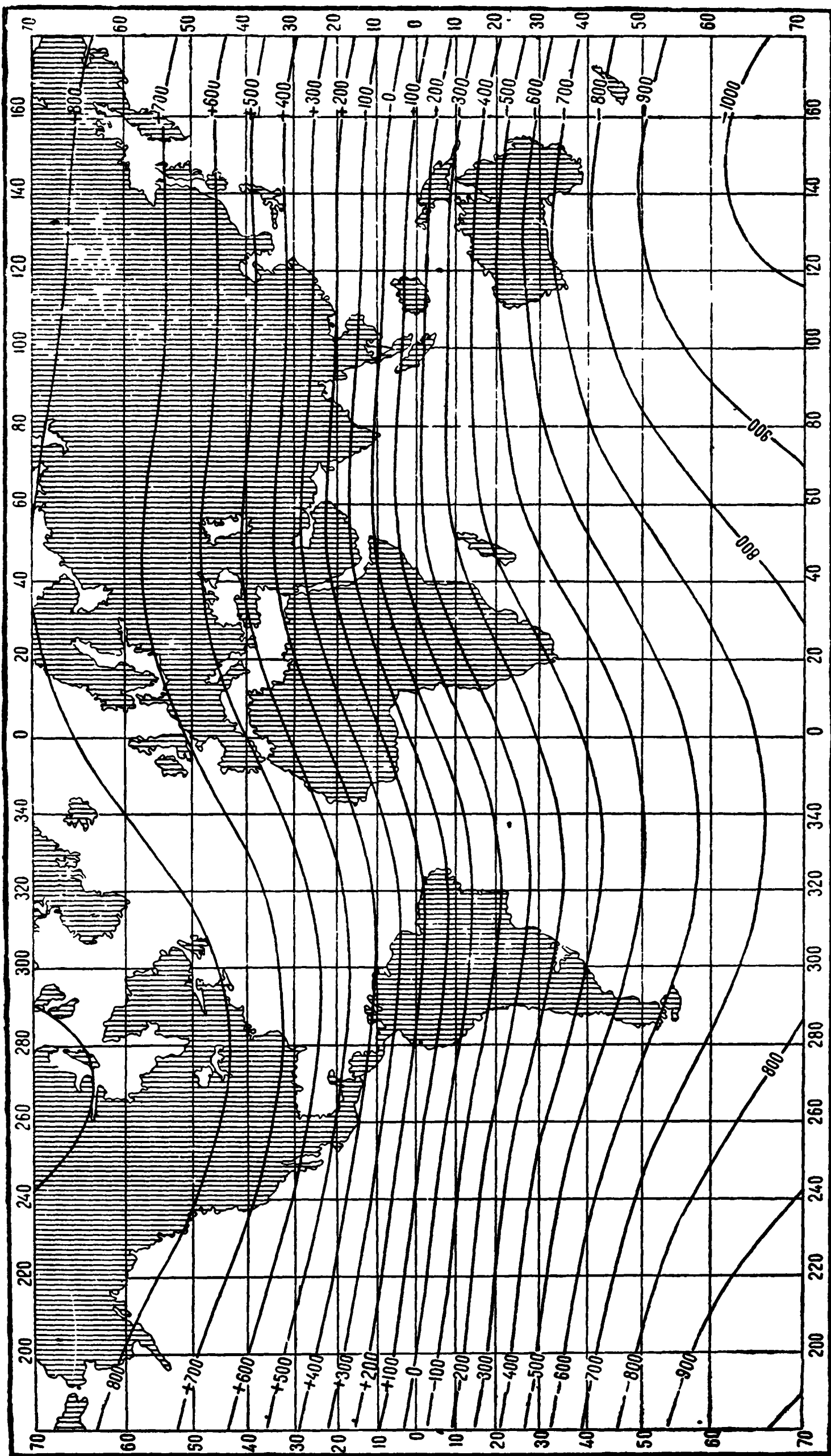
φ	c°	C'	$\log c'$	C''	$\log c''$	C'''	$\log c'''$	$C'''' = 322^\circ 26'$ $\log c''''$
+45°	+1354.1	93° 56'	2.32288	159° 51'	2.18474	45° 3'	1.57728	0.81352
44	1334.2	92 34	2.34027	158 53	2.19069	45 31	1.59606	0.84332
43	1313.6	91 18	2.35721	157 53	2.19598	46 0	1.61401	0.87209
42	1292.1	90 9	2.37367	156 50	2.20064	46 30	1.63116	0.89987
41	1270.0	89 5	2.38961	155 44	2.20468	47 1	1.64754	0.92670
40	1247.1	88 6	2.40502	154 36	2.20815	47 33	1.66317	0.95260
39	1223.5	87 12	2.41988	153 25	2.21106	48 6	1.67807	0.97759
38	1199.2	86 23	2.43417	152 11	2.21343	48 40	1.69226	1.00171
37	1174.1	85 39	2.44789	150 55	2.21531	49 15	1.70578	1.02497
36	1148.4	84 58	2.46103	149 35	2.21671	49 51	1.71862	1.04741
35	1122.0	84 22	2.47360	148 12	2.21766	50 29	1.73083	1.06904
34	1094.9	83 48	2.34558	146 46	2.21819	51 7	1.74241	1.08988
33	1067.2	83 19	2.49699	145 16	2.21834	51 47	1.75338	1.10994
32	1038.9	82 52	2.50782	143 44	2.21813	52 28	1.76376	1.12926
31	1009.9	82 28	2.51808	142 8	2.21759	53 10	1.77356	1.14784
30	980.5	82 7	2.52779	140 29	2.21677	53 54	1.78283	1.16570
29	950.4	81 48	2.53693	138 47	2.21568	54 39	1.79154	1.18286
28	919.9	81 32	2.54554	137 1	2.21438	55 25	1.79974	1.19932
27	888.9	81 18	2.55360	135 12	2.21287	56 12	1.80742	1.21510
26	857.4	81 6	2.56113	133 20	2.21123	57 1	1.81462	1.23022
25	825.5	80 55	2.56815	131 25	2.20947	57 51	1.82134	1.24468
24	793.2	80 47	2.57465	129 26	2.20762	58 43	1.82759	1.25850
23	760.5	80 39	2.58066	127 25	2.20572	59 36	1.83341	1.27168
22	727.5	80 33	2.58618	125 21	2.20380	60 30	1.83879	1.28424
21	694.1	80 29	2.59121	123 15	2.20189	61 26	1.84375	1.29619
20	660.5	80 25	2.59578	121 6	2.20002	62 23	1.84832	1.30752
19	626.7	80 22	2.59991	118 56	2.19821	63 21	1.85250	1.31826
18	592.6	80 20	2.60356	116 43	2.19649	64 21	1.85630	1.52840
17	558.4	80 19	2.60679	114 29	2.19487	65 23	1.85975	1.33796
16	523.9	80 18	2.60959	112 14	2.19337	66 25	1.86286	1.34695
15	489.4	80 17	2.61198	109 58	2.19199	67 30	1.86563	1.35535
14	454.8	80 16	2.61397	107 41	2.19075	68 35	1.86809	1.36320
13	420.1	80 15	2.61556	105 23	2.18963	69 42	1.87025	1.37047
12	385.4	80 15	2.61677	103 6	2.18864	70 50	1.87212	1.37720
11	350.7	80 13	2.61761	100 49	2.18776	71 59	1.87372	1.38337
10	316.0	80 11	2.61809	98 33	2.18699	73 9	1.87505	1.38898
9	281.3	80 9	2.61822	96 17	2.18630	74 21	1.87613	1.39406
8	246.7	80 5	2.61802	94 2	2.18568	75 34	1.87698	1.39859
7	212.3	80 0	2.61750	91 48	2.18510	76 47	1.87759	1.40258
6	177.9	79 54	2.61667	89 36	2.18454	78 2	1.87799	1.40604
5	143.7	79 46	2.61554	87 25	2.18397	79 17	1.87818	1.40896
4	109.6	79 37	2.61414	85 16	2.18336	80 34	1.87816	1.41134
3	75.8	79 25	3.61246	83 8	2.18269	81 51	1.87796	1.41320
2	42.1	79 12	2.61054	81 3	2.18191	83 8	1.87757	1.41452
+ 1	+ 8.6	78 56	2.60839	78 59	2.18103	84 26	1.87700	1.41531
0	-24.6	78 37	2.60603	76 57	2.17998	85 45	1.87626	1.41558

φ	c°	C'	$\log c'$	C''	$\log c''$	C'''	$\log c'''$	$C'''' = 322^\circ 26'$ $\log c''''$
0°	24.6	78°37'	2.60603	76°57'	2.17998	85°45'	1.87626	1.41558
1	57.6	78 15	2.60347	74 56	2.17876	87 3	1.87535	1.41531
2	90.3	77 50	2.60075	72 58	2.17733	88 22	1.87426	1.41452
3	122.8	77 22	2.59789	71 1	2.17566	89 41	1.87301	1.41320
4	154.9	76 50	2.59491	69 6	2.17374	91 0	1.87159	1.41134
5	186.9	76 14	2.59185	67 12	2.17154	92 19	1.87000	1.40896
6	218.5	75 34	2.58874	65 20	2.16905	93 38	1.86824	1.40604
7	249.8	74 50	2.58562	63 29	2.16623	94 56	1.86630	1.40258
8	280.8	74 1	2.58252	61 39	2.16309	96 14	1.86418	1.39859
9	311.6	73 8	2.57949	59 50	2.15959	97 31	1.86187	1.39406
10	342.0	72 11	2.57658	58 2	2.15573	98 48	1.85936	1.38898
11	372.1	71 8	2.57383	56 15	2.15150	100 4	1.85665	1.38337
12	402.0	70 1	2.57129	54 29	2.14689	101 19	1.85373	1.37720
13	431.6	68 49	2.56902	52 43	2.14188	102 33	1.85058	1.37047
14	460.8	67 32	2.56707	50 57	2.13648	103 47	1.84720	1.36320
15	489.8	66 11	2.56549	49 12	2.13067	104 59	1.84357	1.35535
16	518.6	64 45	2.56435	47 26	2.12446	106 10	1.83968	1.34695
17	547.0	63 15	2.56368	45 41	2.11785	107 20	1.83552	1.33796
18	575.3	61 42	2.56354	43 55	2.11083	108 29	1.83107	1.32840
19	603.2	60 5	2.56397	42 9	2.10341	109 36	1.82632	1.31826
20	631.0	58 26	2.56499	40 22	2.09559	110 42	1.82125	1.30752
21	658.5	56 44	2.56664	38 34	2.08737	111 47	1.81585	1.29619
22	685.7	55 1	2.56893	36 45	2.07878	112 51	1.81010	1.28424
23	712.8	53 17	2.57187	34 56	2.06981	113 53	1.80398	1.27168
24	739.7	51 32	2.57546	33 5	2.06047	114 53	1.79749	1.25850
25	766.4	49 47	2.57966	31 13	2.05078	115 53	1.78960	1.24468
26	792.9	48 3	2.58447	29 20	2.04076	116 51	1.78329	1.23022
27	819.3	46 20	2.58984	27 26	2.03041	117 47	1.77555	1.21510
28	845.5	44 39	2.59572	25 29	2.01975	118 42	1.76737	1.19932
29	871.6	43 0	2.60207	23 32	2.00881	119 36	1.75872	1.18286
30	897.5	41 24	2.60883	21 33	1.99760	120 28	1.74958	1.16570
31	923.3	39 51	2.61593	19 32	1.98614	121 19	1.73995	1.14784
32	949.0	38 21	2.62331	17 30	1.97445	122 8	1.72979	1.12926
33	974.6	36 55	2.63090	15 26	1.96255	122 56	1.71909	1.10994
34	1000.1	35 32	2.63864	13 20	1.95047	123 43	1.70784	1.08988
35	1025.5	34 13	2.64646	11 14	1.93821	124 28	1.69601	1.06904
36	1050.9	32 58	2.65430	9 6	1.92581	125 12	1.68358	1.04741
37	1076.1	31 46	2.66210	6 57	1.91327	125 54	1.67053	1.02497
38	1101.2	30 38	2.66980	4 47	1.90061	126 36	1.65684	1.00171
39	1126.3	29 34	2.67736	2 37	1.88785	127 16	1.64249	0.97759
40	1151.3	28 33	2.68471	0 26	1.87498	127 55	1.62745	0.95260
41	1176.2	27 36	2.69181	358 14	1.86202	128 32	1.61171	0.92670
42	1201.0	26 42	2.69862	356 3	1.84896	129 9	1.59523	0.89987
43	1225.8	25 52	2.70510	353 52	1.83580	129 44	1.57800	0.87209
44	1250.5	25 4	2.71121	351 42	1.82252	130 18	1.55998	0.84332
45	1275.1	24 19	2.71691	349 33	1.80912	130 52	1.54115	0.81352

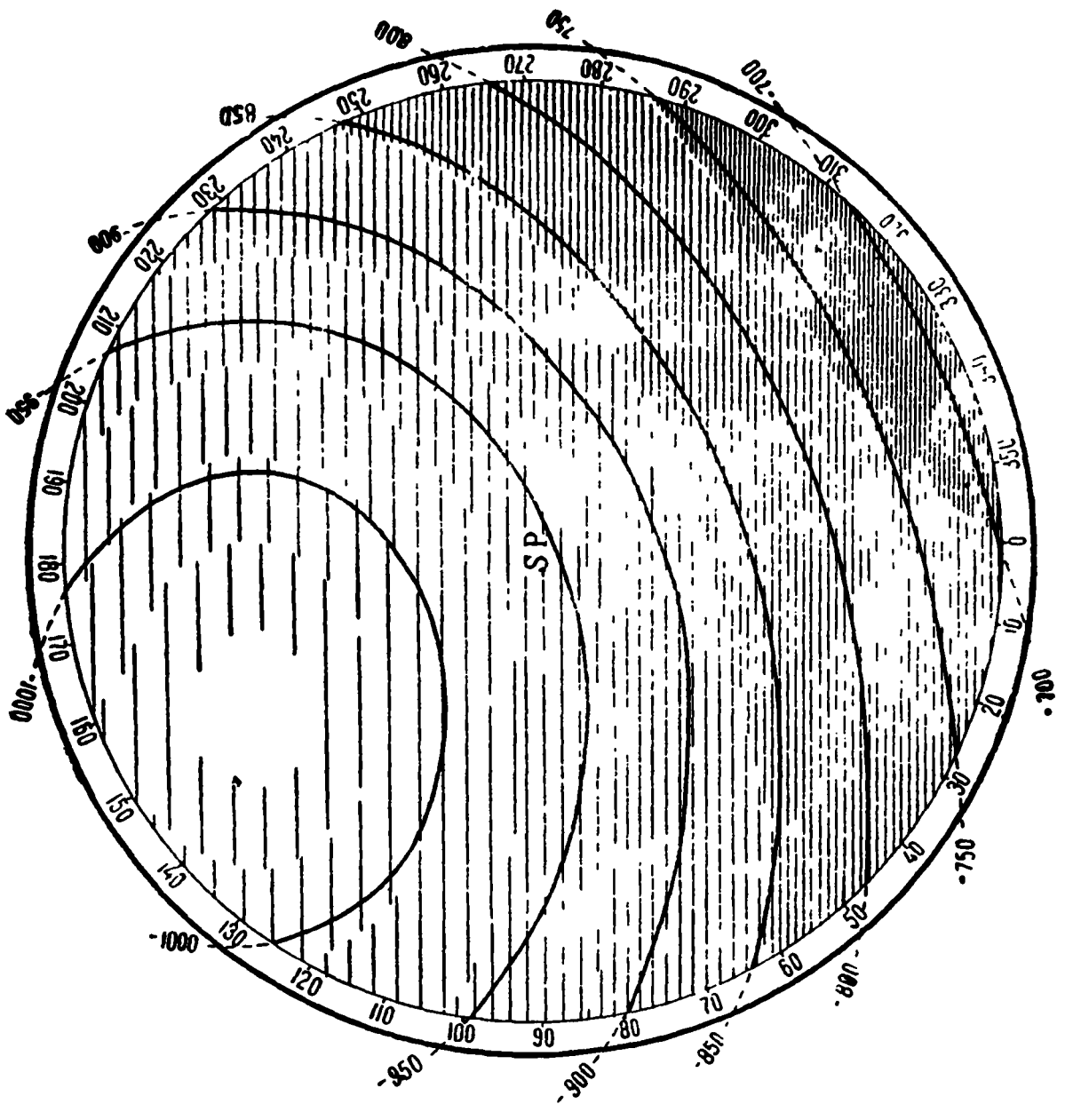
φ	c°	C'	$\log c'$	C''	$\log c''$	C'''	$\log c'''$	$C'''' = 322^\circ 26'$ $\log c''''$
—45°	—1275.1	24°19'	2.71691	349°33'	1.80912	130°52'	1.54115	0.81352
46	1299.5	23 37	2.72218	347 25	1.79558	131 23	1.52147	0.78266
47	1323.9	22 58	2.72698	345 18	1.78186	131 54	1.50092	0.75071
48	1348.1	22 21	2.73129	343 13	1.76793	132 24	1.47945	0.71762
49	1372.3	21 47	2.73508	341 10	1.75376	132 53	1.45705	0.68335
50	1396.2	21 14	2.73833	339 10	1.73931	133 21	1.43365	0.64785
51	1420.0	20 44	2.74100	337 12	1.72452	133 48	1.40924	0.61107
52	1443.7	20 16	2.74307	335 17	1.70935	134 14	1.38376	0.57295
53	1467.1	19 49	2.74453	333 25	1.69375	134 39	1.35716	0.53343
54	1490.3	19 25	2.74534	331 35	1.67764	135 3	1.32940	0.49245
55	1513.2	19 1	2.74550	329 50	1.66098	135 26	1.30043	0.44994
56	1536.1	18 40	2.74495	328 7	1.64368	135 48	1.27017	0.40583
57	1558.6	18 20	2.74370	326 28	1.62568	136 10	1.23857	0.36001
58	1580.8	18 1	2.74169	324 52	1.60691	136 31	1.20556	0.31242
59	1602.7	17 43	2.73892	323 21	1.58728	136 50	1.17106	0.26294
60	1624.2	17 26	2.73535	321 52	1.56672	137 9	1.13498	0.21146
61	1645.4	17 11	2.73094	320 27	1.54513	137 28	1.09724	0.15786
62	1666.1	16 57	2.72566	319 6	1.52242	137 45	1.05774	0.10202
63	1686.5	16 43	2.71948	317 48	1.49850	138 2	1.01635	0.04377
64	1706.4	16 31	2.71235	316 34	1.47326	138 18	0.97296	9.98295
65	1725.9	16 19	2.70421	315 24	1.44658	138 33	0.92742	9.91937
66	1744.9	16 8	2.69503	314 17	1.41834	138 48	0.87957	9.85283
67	1763.3	15 58	2.68474	313 13	1.38840	139 2	0.82925	9.78309
68	1781.2	15 49	2.67328	312 12	1.35661	139 15	0.77624	9.70988
69	1798.6	15 40	2.66056	311 15	1.32281	139 28	0.72031	9.63290
70	1815.3	15 32	2.64650	310 21	1.28680	139 40	0.66122	9.55179
71	1831.4	15 24	2.63100	309 30	1.24837	139 51	0.59864	9.46615
72	1846.9	15 17	2.61395	308 42	1.20727	140 1	0.53223	9.37551
73	1861.6	15 11	2.59520	307 57	1.16322	140 11	0.46157	9.27932
74	1875.7	15 5	2.57459	307 16	1.11588	140 21	0.38618	9.17693
75	1889.1	14 59	2.55193	306 37	1.06485	140 30	0.30547	9.06756
76	1901.7	14 54	2.52699	306 0	1.00966	140 38	0.21874	8.95028
77	1913.5	14 50	2.49948	305 27	0.94972	140 45	0.12512	8.82393
78	1924.6	14 45	2.46904	304 56	0.88472	140 52	0.02356	8.68709
79	1934.8	14 42	2.43523	304 28	0.81256	140 59	9.91270	8.53797
80	1944.2	14 38	2.39746	304 3	0.73327	141 5	9.79081	8.37426
81	1952.8	14 35	2.35498	303 40	0.64493	141 10	9.65560	8.19291
82	1960.5	14 32	2.30676	303 19	0.54547	141 15	9.50400	7.98980
83	1967.3	14 30	2.25136	303 1	0.43201	141 19	9.33165	7.75916
84	1973.3	14 28	2.18665	302 46	0.30031	141 22	9.13223	7.49252
85	1978.3	14 26	2.10937	302 33	0.04380	141 25	8.89588	7.17676
86	1982.5	14 25	2.01401	302 22	9.95118	141 28	8.60613	6.78992
87	1985.7	14 24	1.82028	302 14	9.70281	141 30	8.23208	6.29078
88	1988.0	14 23	1.71505	302 8	9.35148	141 31	7.70435	5.58686
89	1989.5	14 23	1.41453	302 5	8.74992	141 32	6.80158	4.38300
90	1989.9	14 23	— ∞	302 3	— ∞	141 32	— ∞	— ∞

КАРТЫ
ИЗ
„АТЛАСА ЗЕМНОГО МАГНЕТИЗМА”

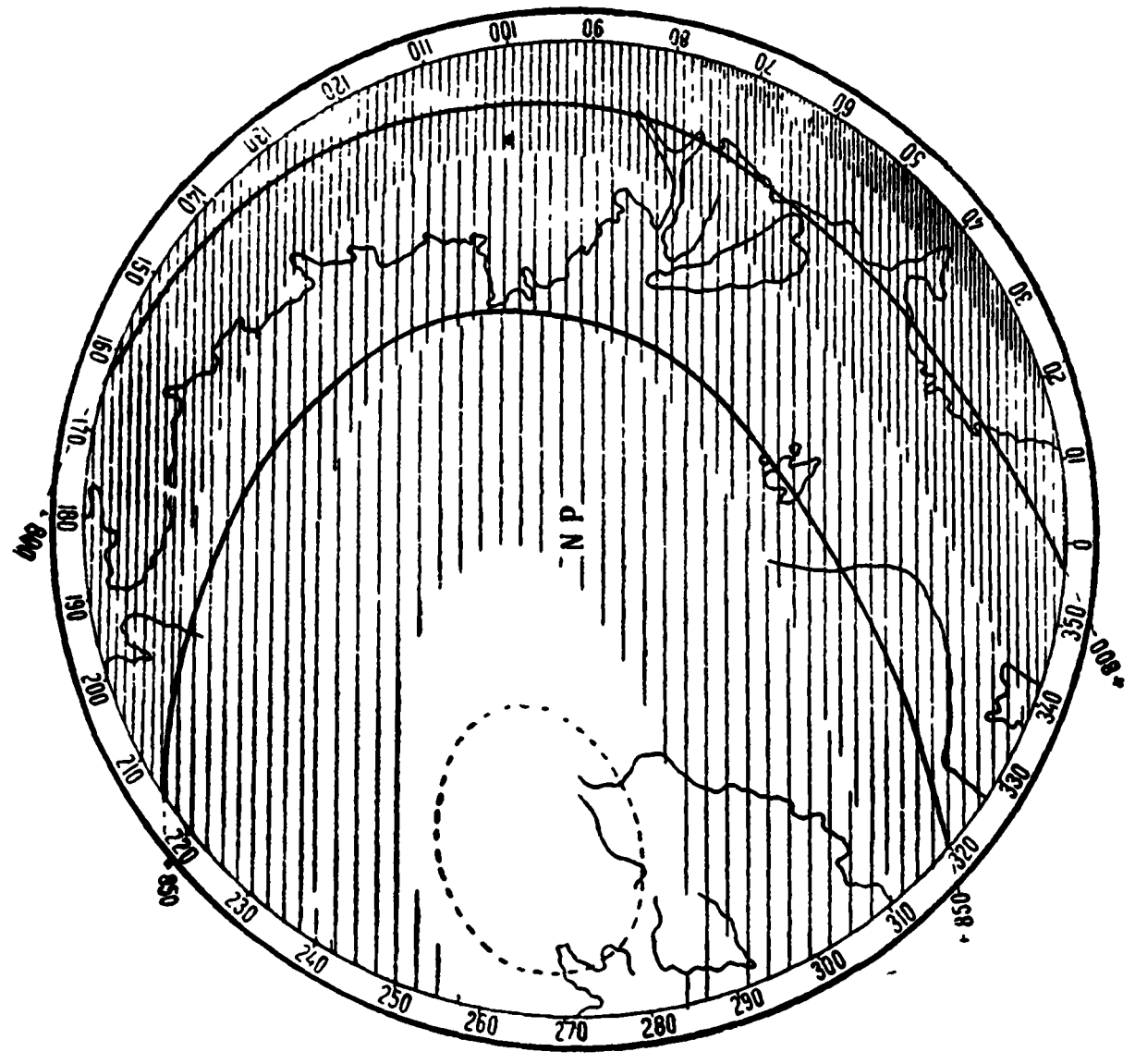




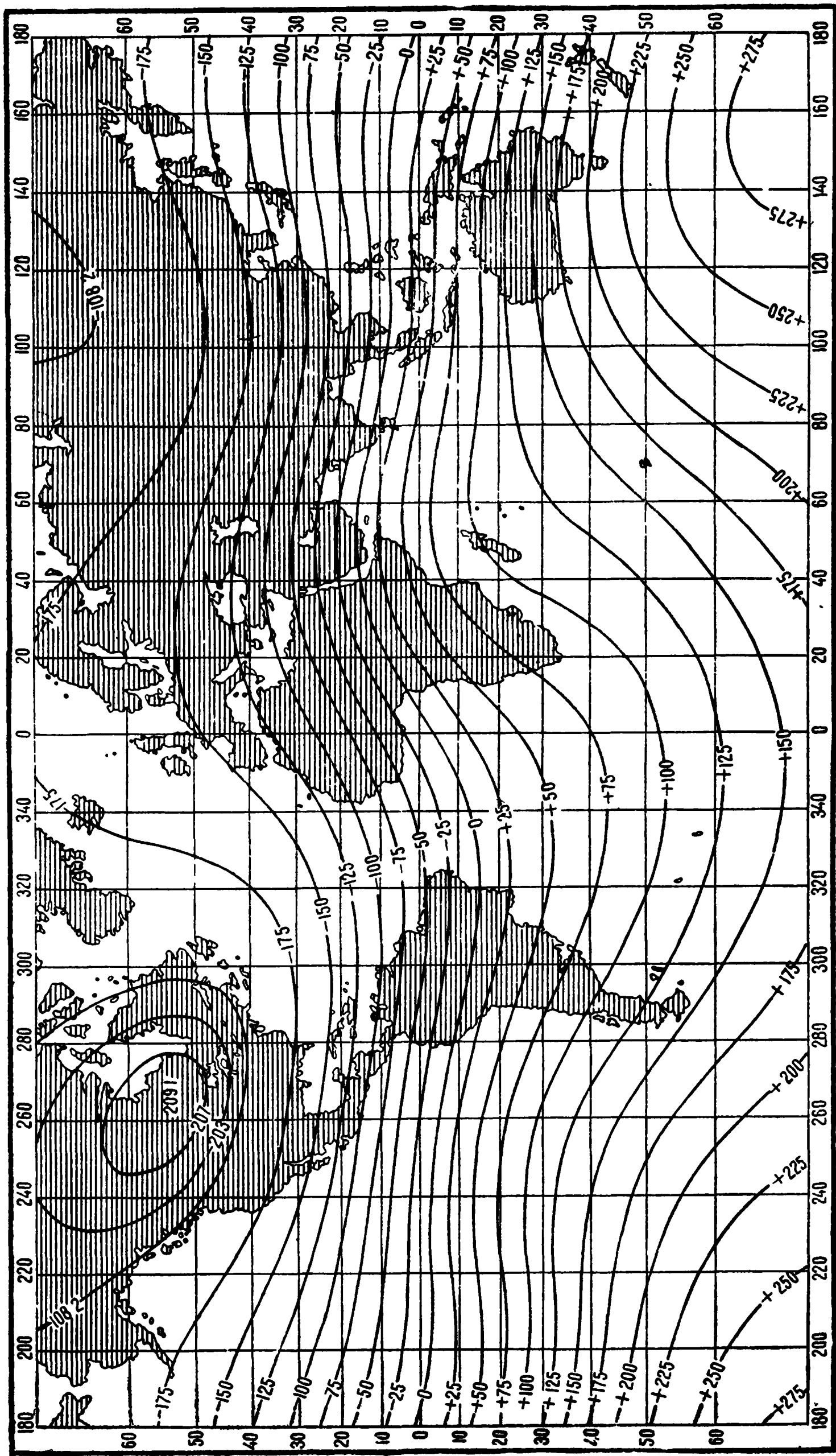
Карта значений $\frac{V}{R}$.



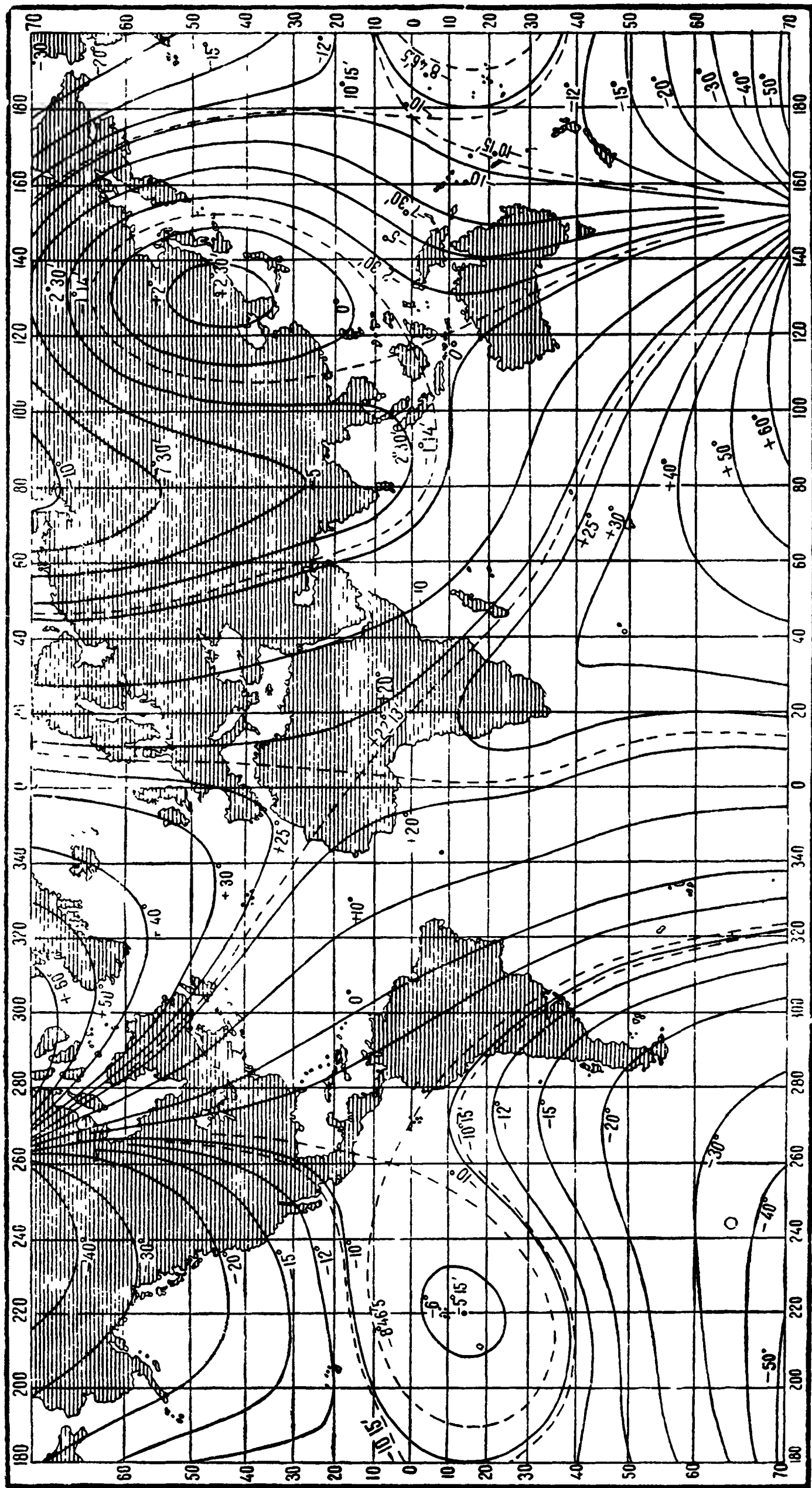
Карта значений $\frac{V}{R}$.



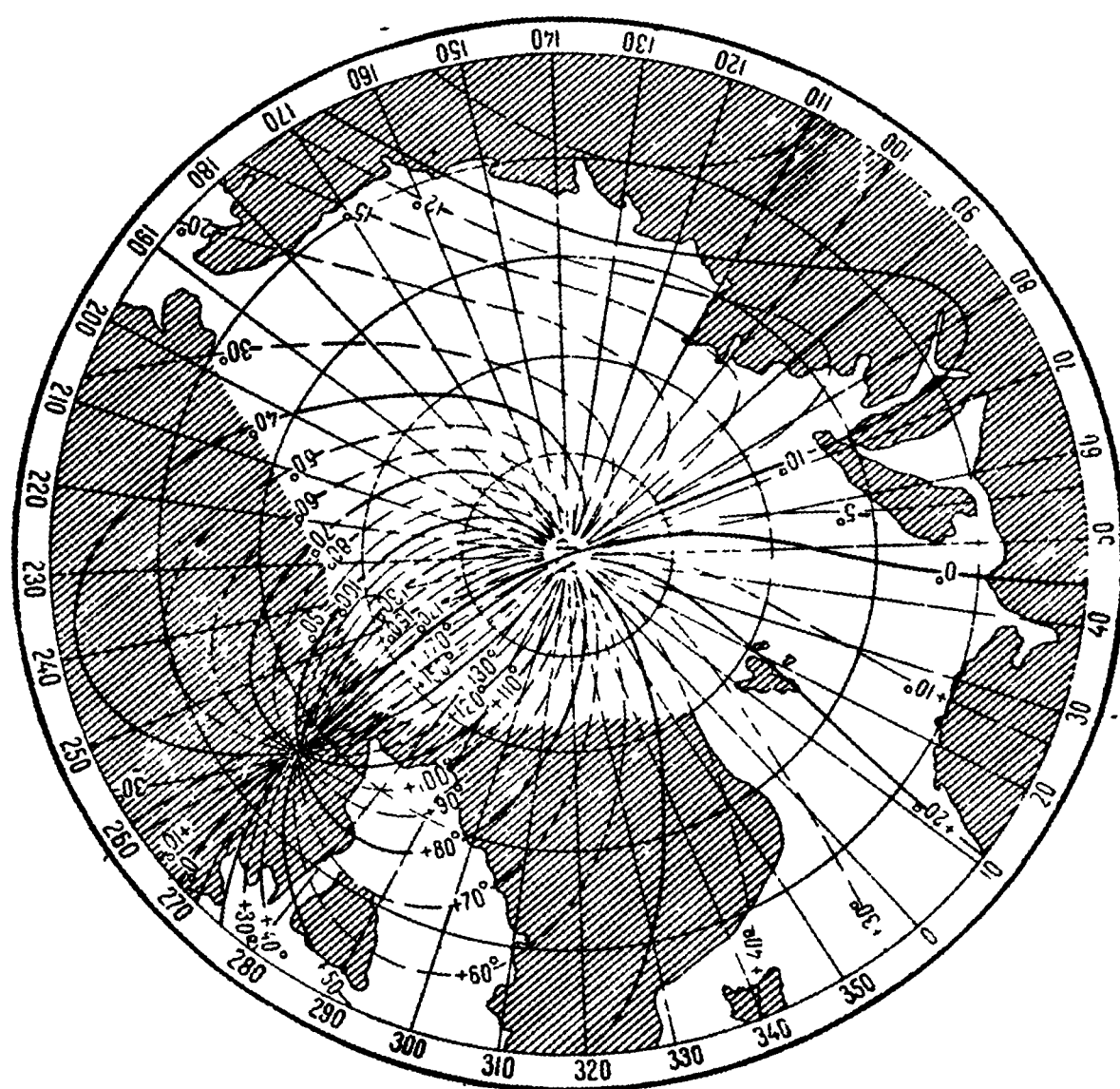
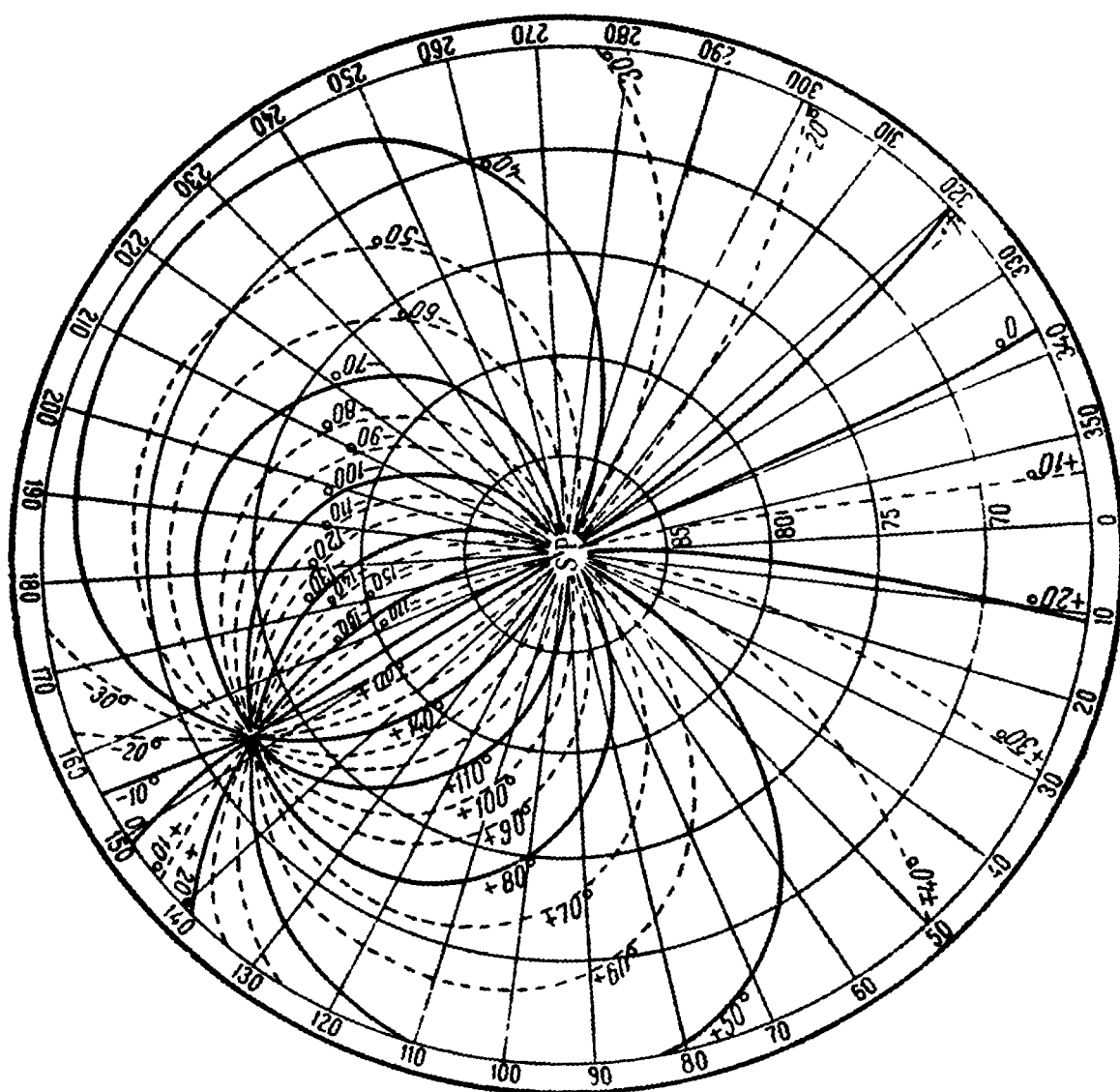
Карта значений $\frac{V}{R}$.



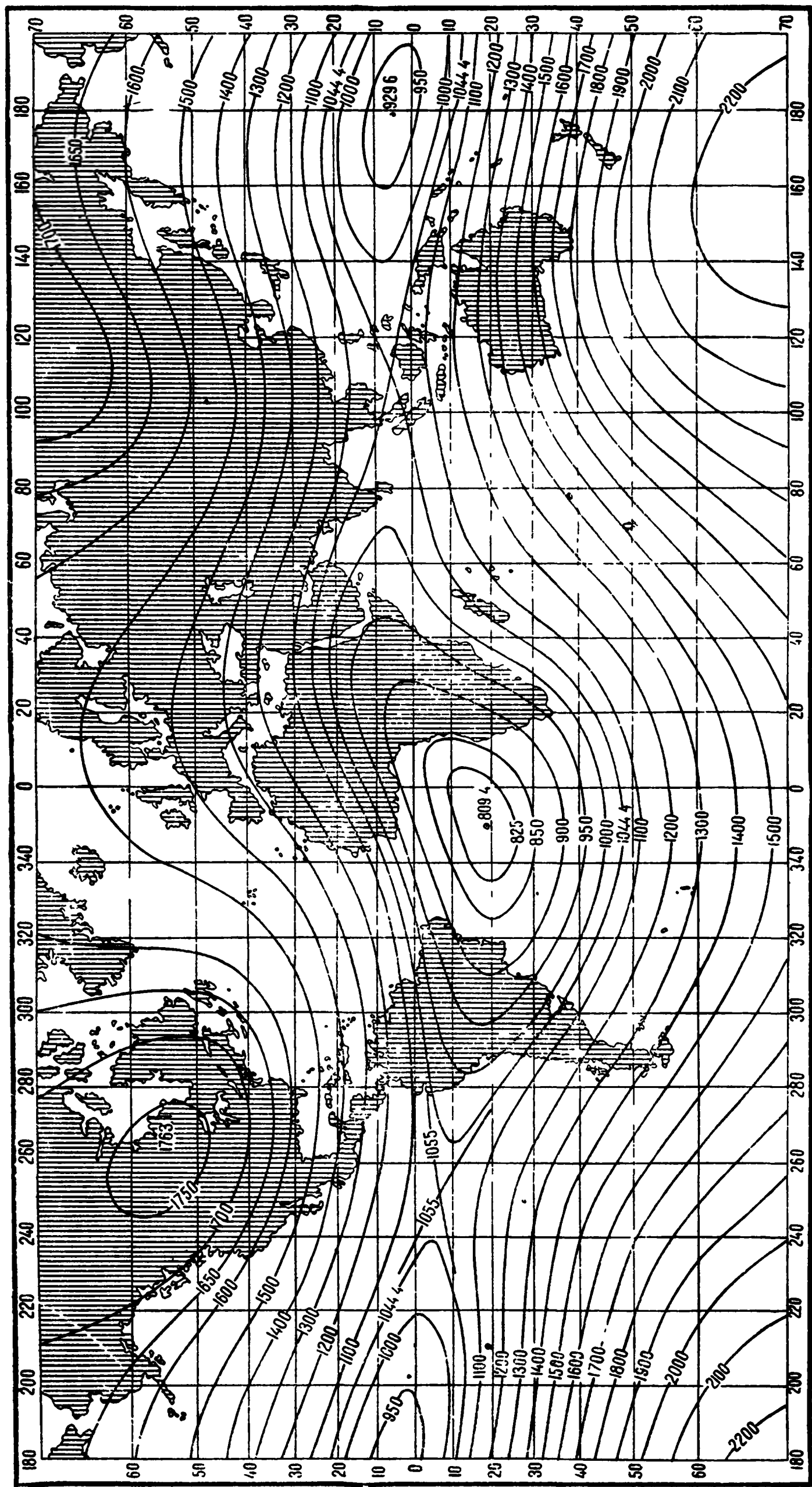
Карта идеального распределения плотности магнетизма на земной поверхности,



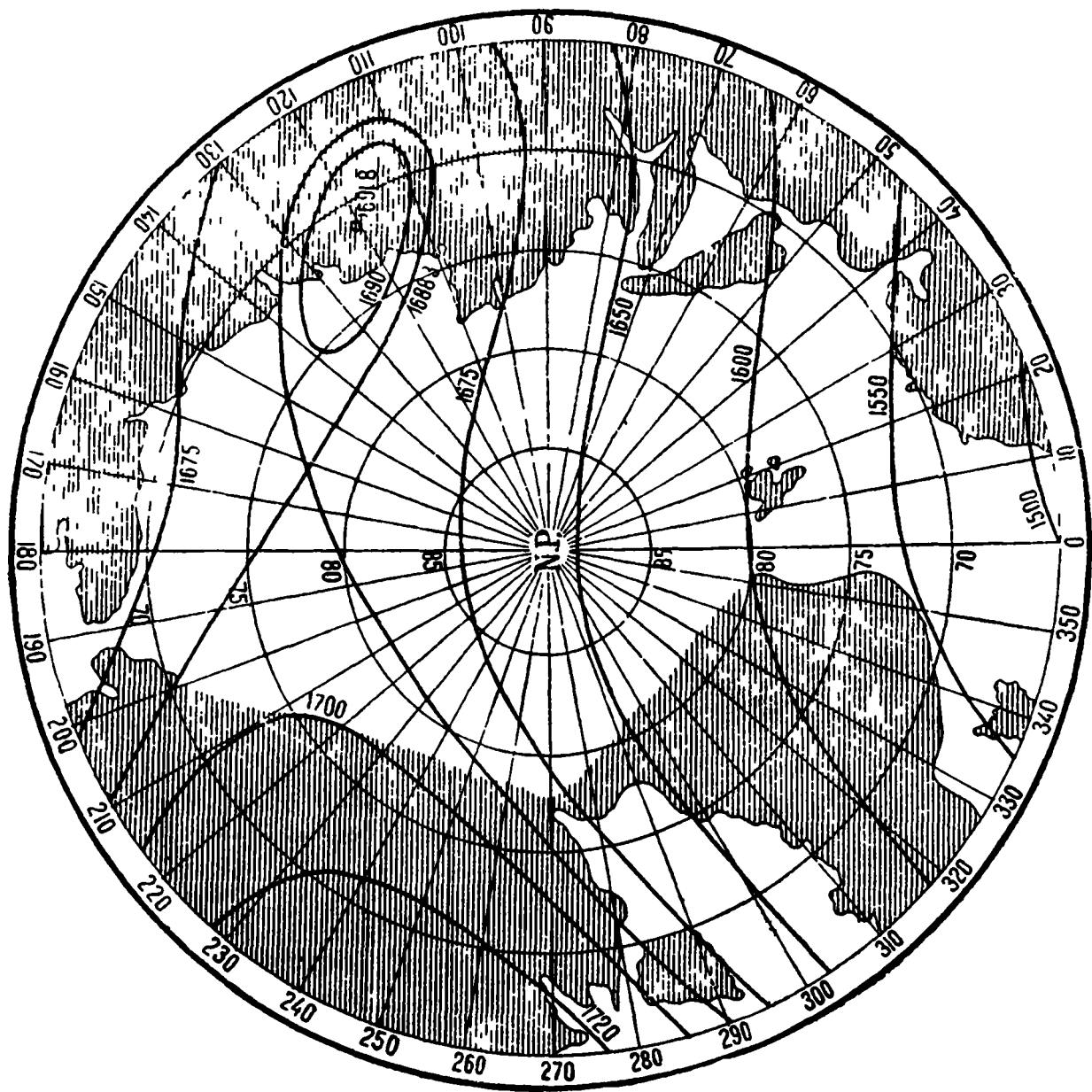
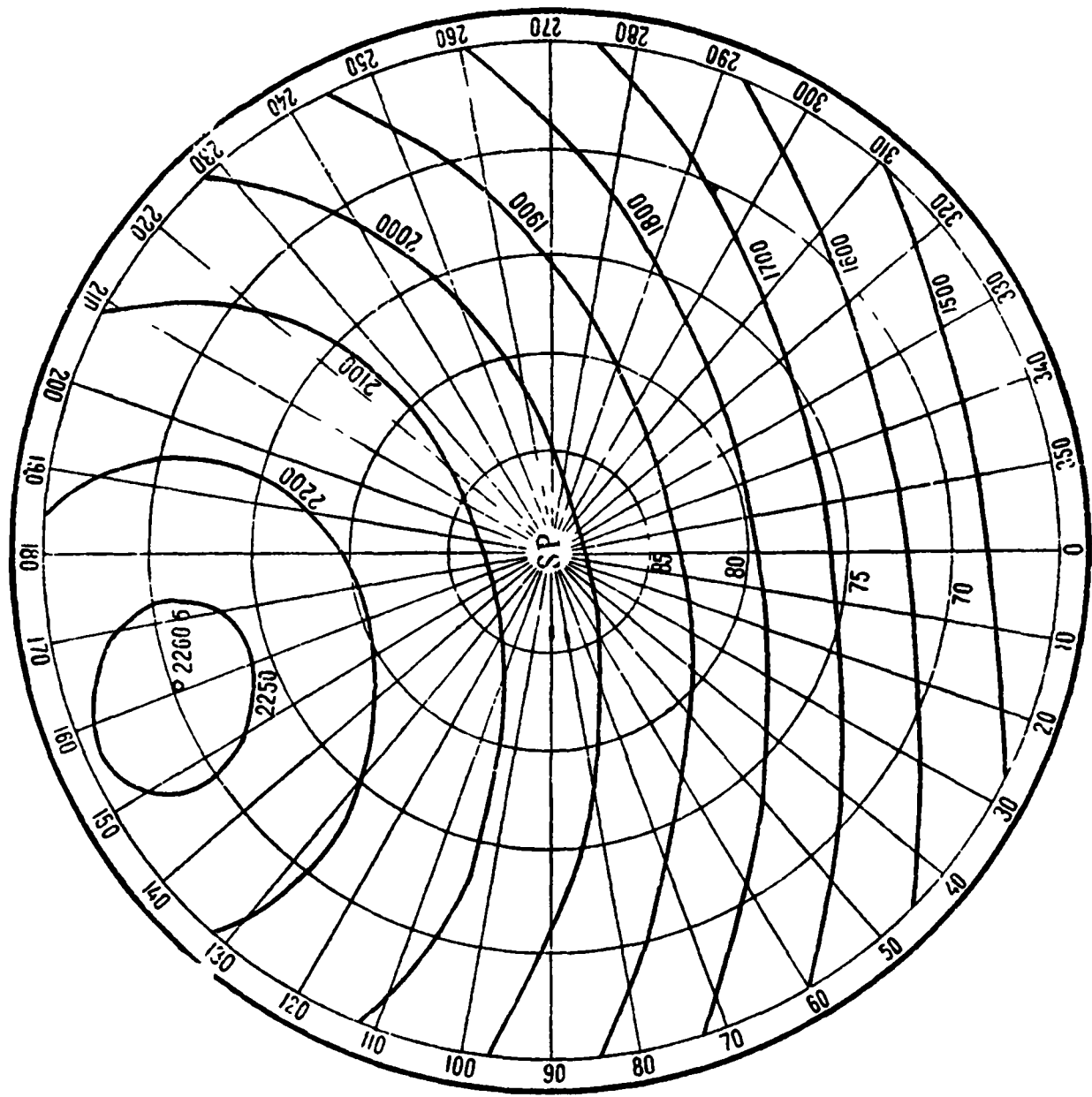
Карта вычисленных значений склонения.



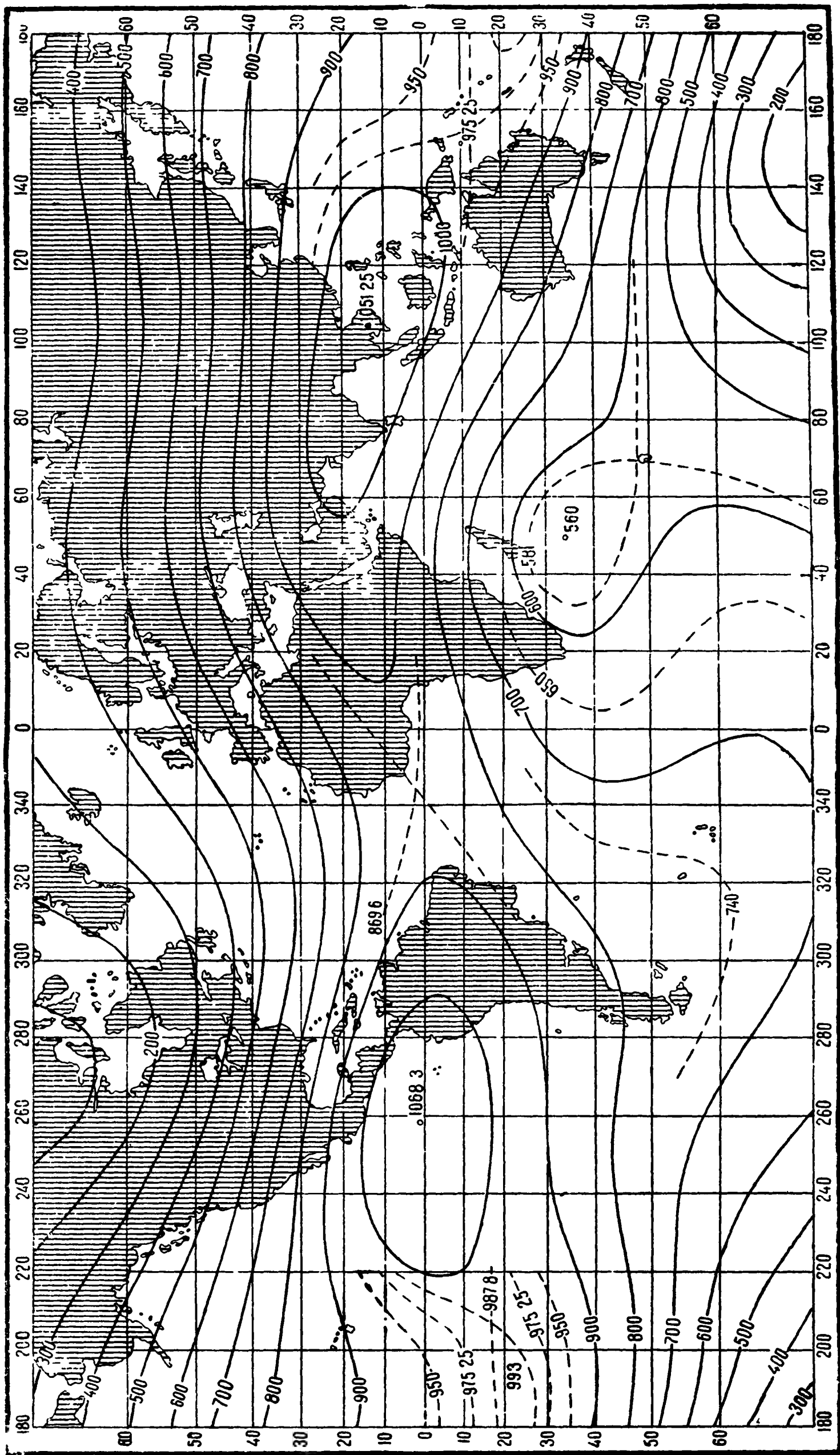
Карта вычисленных значений склонения.



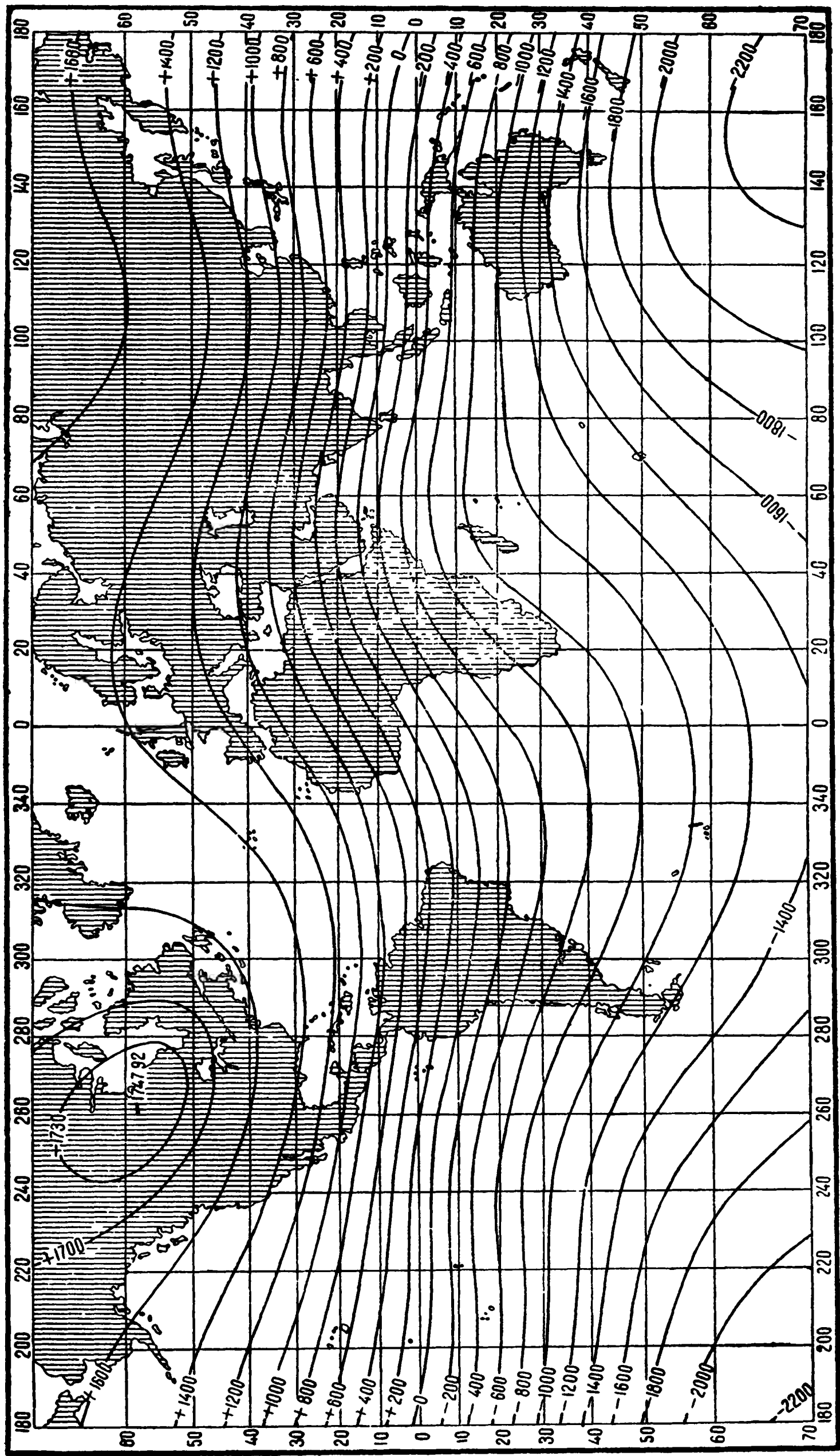
Карта вычисленных значений полной напряженности.



Карта вычисленных значений полной напряженности.



Карта вычисленных значений горизонтальной напряженности.



Карта вычисленных значений вертикальной составляющей.

**ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ
ОТНОСИТЕЛЬНО СИЛ
ПРИТЯЖЕНИЯ И ОТТАЛКИВАНИЯ,
ДЕЙСТВУЮЩИХ
ОБРАТНО ПРОПОРЦИОНАЛЬНО
КВАДРАТУ РАССТОЯНИЯ**



{Отчет, напечатанный в „Геттингенских ученых ведомостях“
26 марта 1840 г.]



Если для объяснения магнитных явлений допустить существование двух магнитных жидкостей, одноименные части которых взаимно отталкиваются, а разноименные притягиваются, то намагничивание тела будет состоять в *разделении* находящихся в нем жидкостей. По первому впечатлению чувственного „кажется“ склоняются представлять себе это разделение в магнитном бруске так, что один конец содержит только северную, другой — только южную жидкость; но более точное размышление сразу показывает неприемлемость такого представления и необходимость допускать разделение носителя жидкостей (сталь или железо) в малейших, для нас неизмеримых, частях, так что каждая *измеримая* часть носителя, как после разделения, так и до него, содержит всегда равные количества обеих жидкостей.

Когда же в сочинениях по физике обучают истинному представлению, но затем в последующем говорят о свободном северном магнетизме, который находится на одном конце магнита, и о южном, находящемся на другом конце, то такие неустойчивые определения смешивают понятия и не имеют научной точности. В эту неясность может быть внесен свет лишь с помощью теоремы, упомянутой в п. 2 „*Intensitas vis magneticae terrestris*“, которая состоит в том, что вместо любого распределения магнитных жидкостей внутри телесного объема можно представить идеальное распределение их по поверхности этого объема, так что в каждой точке внешнего пространства это идеальное распределение будет произ-

водить в точности то же самое действие, как и настоящее. В „Общей теории земного магнетизма“ (в третьем томе издаваемого автором, совместно с проф. Вебером, ежегодника „Результаты наблюдений магнитного союза“) автор ссылался на эту теорему, причем он заметил, что невозможно исследовать действительное распределение магнетизма внутри Земли, но что равнозначное идеальное распределение на поверхности Земли лежит в области для нас достижимой; графическое представление этого идеального распределения, согласно упомянутой теории, теперь уже начерчено и литографировано и будет помещено в магнитном атласе, который будет приложен к т. 4 „Результатов“ [1].

Что же касается обоснования упомянутой теоремы, то оно требует довольно сложной математической подготовки; сама теорема является частным случаем более общей, которая, в свою очередь, представляет последнее звено целой цепи строго связанных между собою предложений. Полное развитие этих исследований составляет предмет представленной статьи. Однако не надо думать, что промежуточные предложения являются средством достижения изложенной цели; они представляют самостоятельный интерес как общие исследования сил, действующих обратно пропорционально квадрату расстояния (из которых магнитные силы являются только частным случаем), но изложение здесь всех подробностей потребовало бы гораздо большей обстоятельности, чем позволяет объем этих листов. Для образца здесь может быть приведена лишь пара теорем, которые можно изложить понятно и которые находятся в некотором соприкосновении с работами других математиков.

I. Поверхностью равновесия по отношению к массам, вызывающим силы притяжения или отталкивания, как известно, называют такую поверхность, во всех точках которой равнодействующая всех сил или нормальна к поверхности, или же исчезает [2]. Одна из теорем такова: если замкнутая поверхность есть поверхность равновесия для сил

притяжения или отталкивания, происходящих от масс, находящихся во внешнем пространстве, то равнодействующая сила, как в каждой точке этой поверхности, так и в каждой точке внутреннего объема, равна нулю.

Пуассон замечает в своей знаменитой статье о распределении электричества по поверхности проводящих тел, что для удержания равновесного состояния наэлектризованного проводящего тела недостаточно, чтобы внутренняя граничная поверхность свободного электричества, находящегося на поверхности проводящего тела, была бы поверхностью равновесия, но что кроме этого необходимо, чтобы ни в одной точке внутреннего объема это электричество не оказывало ни притяжения, ни отталкивания [3].

Вышеуказанная теорема, напротив того, доказывает, что первое условие вполне достаточно, ибо второе есть его необходимое следствие, в нем заключенное.

II. Вторая теорема относится к другому случаю, когда притягивающие или отталкивающие массы находятся внутри объема, ограниченного замкнутой поверхностью. Здесь в каждой точке поверхности, если она является поверхностью равновесия, равнодействующая сила будет направлена только в одну сторону и в том случае, когда одновременно есть и притягивающие и отталкивающие массы; смотря по тому, сумма каких масс — притягивающих или отталкивающих — больше, равнодействующая во всех точках будет направлена внутрь или наружу; но если обе суммы между собою равны, то, если существует вообще замкнутая и объемлющая поверхность равновесия, равнодействующая сила в каждой ее точке и во всем бесконечном внешнем пространстве равна нулю.

III. В статье дается строгое доказательство не только того, что на каждой заданной замкнутой поверхности может быть непрерывно распределена заданная масса таким образом, что в каждой точке внутреннего объема равнодействующая сил притяжения или отталкивания равна нулю, но и

доказывается, что это всегда можно осуществить одним единственным образом. Как раз обратное недавно было высказано одним искусным геометром в сообщении Парижской академии наук (Comptes rendus, 1839, № 6) [1].

**ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ
ОТНОСИТЕЛЬНО СИЛ
ПРИТЯЖЕНИЯ И ОТТАЛКИВАНИЯ,
ДЕЙСТВУЮЩИХ
ОБРАТНО ПРОПОРЦИОНАЛЬНО
КВАДРАТУ РАССТОЯНИЯ**





§ 1

В природе есть много различных явлений, которые мы объясняем допущением сил, действующих между малейшими частицами вещества обратно пропорционально квадрату расстояния между ними.

К ним прежде всего принадлежит всеобщее тяготение, согласно которому каждая весомая частица μ действует на другую μ' с движущей силой $\frac{\mu\mu'}{r^2}$, когда расстояние равно r . Эта сила стремится сблизить частицы по направлению прямой, соединяющей частицы.

Если для объяснения магнитных явлений допустить существование двух магнитных жидкостей, из которых одна рассматривается как величина положительная, другая же как отрицательная, то два элемента μ и μ' такого рода действуют друг на друга с движущей силою $\frac{\mu\mu'}{r^2}$ по направлению прямой линии, соединяющей частицы, отталкиваясь, когда μ , μ' одноименны, и притягиваясь, когда μ и μ' разноименны.

Совершенно так же действуют друг на друга и частицы электрических жидкостей.

Линейный элемент ds гальванического тока действует на элемент магнитной жидкости μ (если допустить существование таковой) также с некоторой движущей силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния r , но здесь имеет место совершенно особенное обстоятельство: именно, направление

силы не совпадает с направлением соединяющей прямой, а перпендикулярно к плоскости, проведенной через μ и через направление ds , и, кроме того, величина силы зависит не только от расстояния, но и от угла, составленного r с направлением ds . Если обозначить этот угол через θ , то мера движущей силы, с которою ds действует на μ , будет $\sin \theta \frac{\mu ds}{r^2}$, и такую же величину имеет сила, вызываемая действием μ на элемент тока ds или на весомый носитель тока, причем ее направление противоположно направлению первой силы.

Если принять вместе с Ампером, что два элемента гальванических токов ds и ds' действуют друг на друга притягивающим или отталкивающим образом, то явления вынуждают нас принять эту силу обратно пропорциональной квадрату расстояния, но при этом требуется еще ввести довольно сложную зависимость от направления элементов тока.

В этой статье мы ограничимся тремя первыми случаями, т. е. силами, действующими обратно пропорционально квадрату расстояния в направлении прямой между элементом, который действует, и тем, на который он действует; некоторые теоремы с небольшим изменением находят применение и в других случаях, но обстоятельное изложение их должно быть оставлено для другой статьи.

§ 2

Обозначим через a, b, c прямоугольные координаты материальной точки, из которой действует сила отталкивания или притяжения; ускоряющую силу в некоторой точке O с координатами x, y, z обозначим через

$$\frac{\mu}{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2} = \frac{\mu}{r^2},$$

причем μ для первого случая предыдущего параграфа представляет собой весомую материю, находящуюся в первой точке, во втором и третьем — количество магнитной или

электрической жидкости. Если эту силу разложить параллельно осям координат, то составляющие будут

$$\epsilon\mu \frac{a-x}{r^3}; \quad \epsilon\mu \frac{b-y}{r^3}; \quad \epsilon\mu \frac{c-z}{r^3},$$

причем $\epsilon = +1$ или $\epsilon = -1$, смотря по тому, будет ли эта сила силой притяжения или силой отталкивания, что тотчас же определяется по роду действующего агента и агента, получающего действие. Эти составляющие представляют собой частные производные

$$\frac{\partial \frac{\epsilon\mu}{r}}{\partial x}; \quad \frac{\partial \frac{\epsilon\mu}{r}}{\partial y}; \quad \frac{\partial \frac{\epsilon\mu}{r}}{\partial z};$$

поэтому если на точку O действуют одновременно количества μ^0, μ', μ'' и т. д. с расстояний r^0, r', r'' и т. д., то, положив

$$\frac{\mu^0}{r^0} + \frac{\mu'}{r'} + \frac{\mu''}{r''} + \dots = \sum \frac{\mu}{r} = V,$$

составляющие полной силы, действующей на O , получим в виде

$$\epsilon \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \epsilon \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \epsilon \frac{\partial V}{\partial z}.$$

Если действующие количества не представляют отдельных точек, а заполняют сплошь линию, поверхность или объем, то вместо сумм Σ будут простые, двойные или тройные интегралы. Последний случай единственный, имеющий место в природе, но так как часто вместо него, при некоторых ограничениях, берут фиктивные количества, сосредоточенные в точках или сплошным образом распределенные по линиям или поверхностям, то в нашем исследовании мы будем рассматривать и эти случаи, причем ничто не мешает нам говорить о *массах*, распределенных по поверхностям или линиям или сосредоточенных в одной точке, так как выражение „масса“ будет здесь обозначать лишь то, из чего исходят, как мы представляем себе, силы притяжения или отталкивания.

§ 3

Таким образом, если координаты любой точки пространства мы обозначим через x, y, z и через V сумму всех масс, разделенных на их расстояния до точки O , причем сообразно с условиями исследования отрицательные массы считаются или исключенными, или допустимыми, то V будет некоторой функцией от x, y, z , и исследование особенностей этой функции будет служить основанием теории сил отталкивания или притяжения. Для удобства исследований мы позволим себе придать этой функции V особое название, именно *потенциал масс*, к которым она относится. Для нашего теперешнего исследования этого ограниченного определения достаточно; для рассмотрения других законов притяжения, отличающихся от закона обратной пропорциональности квадрату расстояния, а также для четвертого случая § 1 можно было бы понимать в более общем смысле под словом потенциал такую функцию от x, y, z , частные производные которой по x, y, z представляют составляющие действующей силы.

Если обозначить полную силу, действующую в точке x, y, z , через p и углы, составляемые ею с осями координат, через α, β, γ , то три ее составляющие будут

$$p \cos \alpha = \varepsilon \frac{\partial V}{\partial x}; \quad p \cos \beta = \varepsilon \frac{\partial V}{\partial y}; \quad p \cos \gamma = \varepsilon \frac{\partial V}{\partial z};$$

и

$$p = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2}.$$

§ 4

Если ds есть элемент любой прямой или кривой линии, то $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ являются косинусами углов, составляемых этим

элементом с осями координат; пусть θ есть угол между направлениями элемента и силы в той же точке, тогда

$$\cos \theta = \frac{dx}{ds} \cos \alpha + \frac{dy}{ds} \cos \beta + \frac{dz}{ds} \cos \gamma$$

и, значит, проекция силы на направление ds будет

$$p \cos \theta = \epsilon \left(\frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{dz}{ds} \right) = \epsilon \frac{dV}{ds}.$$

Если провести поверхность через все точки, в которых потенциал имеет постоянное значение, то эта поверхность, вообще говоря, будет отделять части пространства, в которых V меньше указанной величины, от тех, где он больше. Если линия s лежит на этой поверхности или, по меньшей мере, касается ее элементом ds , то $\frac{dV}{ds} = 0$; поэтому, если в этом месте полная сила p не равна нулю (в таком случае нельзя было бы говорить о направлении силы), то $\cos \theta$ должен быть непременно равен нулю; отсюда следует, что направление равнодействующей силы в любой точке такой поверхности должно быть нормально к указанной поверхности и притом в ту сторону пространства, где V имеет бóльшие значения, когда $\epsilon = +1$, и в противоположную, когда $\epsilon = -1$. Назовем такую поверхность поверхностью равновесия. Так как через каждую точку может быть проведена такая поверхность, то линия s , если она не лежит в одной поверхности равновесия, будет в каждой своей точке встречать другую поверхность. Если s пересекает все поверхности равновесия под прямым углом, то касательная к линии s представляет везде направление силы и $\frac{dV}{ds}$ — величину этой силы.

Интеграл $\int p \cos \theta ds$, взятый по любому отрезку линии s , очевидно, будет равен $\epsilon(V' - V^0)$, причем V^0 и V' обозначают значения потенциала в начальной и в конечной точке. Поэтому если s есть линия замкнутая, то этот интеграл, взятый по всей линии, равен нулю [5].

§ 5

Само собою очевидно, что потенциал в каждой точке пространства, расположенного *вне* всех притягивающих или отталкивающих частиц, будет получать конечное значение; это относится также и к его производным как первого, так и высших порядков, так как при этом предположении они также будут представляться суммами конечных частей или интегралами таких дифференциальных уравнений, все коэффициенты которых имеют конечные значения. Так,

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x} &= \sum \mu \cdot \frac{a-x}{r^3}; & \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= \sum \mu \left(3 \frac{(a-x)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right); \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= \sum \mu \cdot \frac{b-y}{r^3}; & \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= \sum \mu \left(3 \frac{(b-y)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right); \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= \sum \mu \cdot \frac{c-z}{r^3}; & \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} &= \sum \mu \left(3 \frac{(c-z)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right).\end{aligned}$$

Известное уравнение

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

справедливо для всех точек пространства вне действующих масс [6].

§ 6

Из различных случаев, в которых приходится рассматривать значение потенциала V или его производных в точках, лежащих не снаружи действующих масс, мы рассмотрим сначала случай, имеющий место в природе, когда массы занимают определенный объем, заполняя его с постоянной или переменной плотностью, но везде конечной.

Пусть t будет полный объем, заключающий массу, dt — бесконечно малый элемент его, координаты которого a, b, c , и элемент массы kdt ; далее, пусть V есть потенциал в точке O , координаты которой x, y, z , так что расстояние ее до этого элемента будет

$$\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2} = r.$$

Следовательно, интеграл

$$V = \int \frac{kdt}{r}$$

должен быть взят по всему объему t , что предполагает тройное интегрирование. Легко видеть, что интегрирование законно даже в том случае, когда точка O лежит внутри объема, несмотря на то, что тогда $\frac{1}{r}$ для бесконечно близких к O элементов будет бесконечно велико, так как если вместо a, b, c ввести полярные координаты

$$a = x + r \cos u, \quad b = y + r \sin u \cos \lambda, \quad c = z + r \sin u \sin \lambda,$$

то

$$dt = r^2 \sin u \, du \, d\lambda \, dr;$$

следовательно,

$$V = \int \int \int k r \sin u \, du \, d\lambda \, dr,$$

причем интегрирование по r производится от $r=0$ до его значения на границе объема t , по λ от $\lambda=0$ до $\lambda=2\pi$, и по u от $u=0$ до $u=\pi$ [7]. Отсюда видно, что V будет иметь одно вполне определенное конечное значение.

Затем легко видеть, что здесь также можно полагать

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \int k dt \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = \int k \frac{a-x}{r^3} dt = X.$$

Основанием к этому служит то, что это выражение после введения полярных координат принимает вид

$$\int \int \int k \cos u \sin u \, du \, d\lambda \, dr$$

и может быть интегрируемо; следовательно, X получает определенное конечное значение, изменяющееся непрерывно, так как все элементы, лежащие бесконечно близко к O , вносят лишь бесконечно малую часть в значение интеграла.

Совершенно так же будет и для

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \int k \frac{b-y}{r^3} dt; \quad \frac{\partial V}{\partial z} = \int k \frac{c-z}{r^3} dt,$$

причем эти величины получают, подобно V , внутри t определенные непрерывно изменяющиеся значения. Это же будет справедливо и для значений на границе объема.

§ 7

Что же касается производных высшего порядка, то для точек внутри объема t надо применить особый прием, так как нельзя написать:

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \int k \frac{\partial \frac{a-x}{r^3}}{\partial x} dt = \int k \left[\frac{3(a-x)^2 - r^2}{r^5} \right] dt,$$

ввиду того, что это выражение, если рассмотреть его точно, представляет собой лишь символ, не имеющий определенного и ясного значения. В самом деле, ввиду того, что внутри какой угодно малой части объема t , заключающей точку O , можно указать такие части, где написанный выше интеграл превзойдет всякую положительную или отрицательную величину, то здесь отсутствует существенное условие метода исчерпывания, при котором интегралу может быть приписано определенное и ясное значение.

§ 8

Прежде чем предпринимать это исследование во всей его полноте, для установления понятий будет полезно рассмотреть один весьма простой частный случай.

Пусть t есть шар радиуса R с центром в начале координат; плотность массы, заполняющей этот шар, постоянна и равна k , расстояние точки O от начала координат $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Как известно, потенциал выражается различно для положения точки O внутри и вне шара, а именно в первом случае будет:

$$V = 2\pi k R^2 - \frac{2}{3} \pi k \rho^2 = 2\pi k R^2 - \frac{2}{3} \pi k (x^2 + y^2 + z^2)$$

и во втором:

$$V = \frac{4}{3} \pi k \frac{R^3}{\rho}.$$

На поверхности шара оба выражения дают одинаковое значение $\frac{4}{3} \pi k R^2$, так что потенциал во всем пространстве меняется непрерывно.

Для производных имеем во внутреннем пространстве:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = X = -\frac{4}{3} \pi k x; \quad \frac{\partial V}{\partial y} = Y = -\frac{4}{3} \pi k y; \quad \frac{\partial V}{\partial z} = Z = -\frac{4}{3} \pi k z;$$

во внешнем пространстве:

$$X = -\frac{4}{3} \pi k \frac{R^3}{\rho^3} x; \quad Y = -\frac{4}{3} \pi k \frac{R^3}{\rho^3} y; \quad Z = -\frac{4}{3} \pi k \frac{R^3}{\rho^3} z.$$

Здесь также эти формулы дают для поверхности одно и то же значение; следовательно, X , Y , Z изменяются непрерывно во всем пространстве.

Иначе обстоит дело относительно производных этих величин. Для внутреннего пространства имеем:

$$\frac{\partial X}{\partial x} = -\frac{4\pi}{3} k; \quad \frac{\partial Y}{\partial y} = -\frac{4\pi}{3} k; \quad \frac{\partial Z}{\partial z} = -\frac{4\pi}{3} k. \quad (*)$$

Для внешнего же будет:

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{4\pi k R^3 (3x^2 - \rho^2)}{3\rho^5};$$

$$\frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{4\pi k R^3 (3y^2 - \rho^2)}{3\rho^5};$$

$$\frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{4\pi k R^3 (3z^2 - \rho^2)}{3\rho^5}.$$

На поверхности эти значения не совпадают со значениями (*), а больше их на

$$\frac{4\pi k}{R^2} x^2; \quad \frac{4\pi k}{R^2} y^2; \quad \frac{4\pi k}{R^2} z^2.$$

Таким образом, эти производные изменяются непрерывно во всем внутреннем и во всем внешнем пространстве, но при

переходе через поверхность претерпевают разрыв, и на поверхности раздела необходимо им придавать двойное значение, смотря по тому, рассматриваются ли dx , dy , dz как положительные или как отрицательные количества.

Подобно этому и остальные шесть производных

$$\frac{\partial X}{\partial y}, \frac{\partial X}{\partial z}; \frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial Y}{\partial z}; \frac{\partial Z}{\partial x}, \frac{\partial Z}{\partial y}$$

равны нулю внутри шара и при переходе через его поверхность претерпевают разрывы:

$$\frac{4\pi k}{R^2} xy; \frac{4\pi k}{R^2} xz \text{ и т. д.}$$

Сумма

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \text{ или } \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

внутри шара будет равна $-4\pi k$ и равна нулю в пространстве вне шара. На самой поверхности это выражение теряет свое простое значение; говоря точнее, можно лишь сказать, что это есть сумма трех частей, из которых каждая может иметь два различных значения; таким образом, есть собственно восемь комбинаций, из которых одна совпадает со значением на внутренней стороне, другая — со значением на наружной стороне, тогда как шесть остальных остаются без всякого смысла. Анализ, при помощи которого некоторые геометры для поверхности шара получили $-2\pi k$, т. е. среднее между внутренним и внешним значением, я не могу считать допустимым, поскольку понятие о производных должно рассматриваться с математической строгостью.

§ 9

Результат, найденный в предыдущем параграфе, есть лишь частный случай общей теоремы, по которой, если точка O находится внутри действующей массы, значение $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ равно $-4\pi k^0$, где k^0 есть плотность в точке O .

Наиболее удовлетворительный способ доказательства этой важной теоремы, кажется, есть следующий^[8].

Примем, что плотность k внутри объема t нигде не изменяется скачком, иначе, что она есть некоторая функция $f(a, b, c)$ координат a, b, c , значение которой изменяется внутри t непрерывно; вне t плотность равна нулю.

Пусть t' есть объем, в который переходит t , когда первая координата каждой точки граничной поверхности уменьшается на величину e , или, что то же самое, если граничная поверхность передвигается параллельно первой координатной оси на e назад; положим, что t состоит из объема t^0 и θ , t' — из t^0 и θ' , так что t^0 есть целый объем, остающийся общим для t и t' . Мы рассмотрим три интеграла:

$$\int_t \frac{f(a, b, c) (a - x) dt}{[(a - x)^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2]^{\frac{3}{2}}}; \quad (1)$$

$$\int_t \frac{f(a, b, c) (a - x - e) dt}{[(a - x - e)^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2]^{\frac{3}{2}}}; \quad (2)$$

$$\int_{t'} \frac{f(a + e, b, c) (a - x) dt}{[(a - x)^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2]^{\frac{3}{2}}}; \quad (3)$$

причем первый интеграл (1) берется по всему объему и будет равен $\frac{\partial V}{\partial x} = X$ в точке O . Интеграл (2) берется также по всему объему t и будет значением $\frac{\partial V}{\partial x}$ в той точке, координаты которой $x + e, y, z$; его значение обозначим через $X + \xi$. Очевидно, что интеграл (3) тождественен с интегралом (2), взятым по всему объему t' .

Положим, что наши интегралы имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} \text{интеграл (1), взятый по } t^0, & \dots \dots \dots l; \\ \text{„ } \theta, & \dots \dots \dots \lambda; \end{aligned}$$

интеграл (3), взятый по $t^0, \dots, e'$;
 „ $\theta', \dots, \lambda'$;

тогда

$$X = l + \lambda; \quad X + \xi = l' + \lambda'.$$

Если положить

$$f(a + e, b, c) - f(a, b, c) = \Delta k,$$

то интеграл

$$\int_{t^0} \frac{\frac{\Delta k}{e} (a - x) dt}{[(a - x)^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2]^{\frac{3}{2}}} s = \frac{l' - l}{e}. \quad (4)$$

Результаты, полученные до сих пор, пригодны вообще для всякого положения точки O ; при дальнейшем рассмотрении должен быть исключен случай, когда O лежит на самой поверхности или надо предположить, что O лежит на измеримом расстоянии от поверхности внутри или снаружи объема t .

Положим, что e становится бесконечно малым, тогда объемы θ и θ' представят собой два бесконечно тонких слоя, прилегающих к поверхности объема t ; если мы разделим эту поверхность на элементы ds и обозначим через α угол, составляемый внешней нормалью с первой осью координат, то α , очевидно, будет острым везде, где поверхность объема t граничит с θ , и тупым там, где она граничит с θ' . Элементы θ поэтому будут выражаться через $e \cos \alpha ds$, элементы θ' через $-e \cos \alpha ds$, откуда легко заключить, что $\frac{\lambda - \lambda'}{e}$ перейдет в интеграл

$$\int \frac{f(a, b, c) (a - x) \cos \alpha ds}{[(a - x)^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

или, что то же, в интеграл

$$\int \frac{k(a - x) \cos \alpha ds}{r^3}$$

по всей поверхности, причем под k надо подразумевать плотность на элементе ds .

При предположении, что значение e бесконечно мало, $\frac{\Delta k}{e}$ перейдет в частную производную $\frac{\partial f(a, b, c)}{\partial a}$ или $\frac{\partial k}{\partial a}$, и значение интеграла (4), т. е. $\frac{l' - l}{e}$, перейдет в интеграл

$$\int \frac{\frac{\partial k}{\partial a} (a - x) dt}{r^3},$$

взятый по всему объему t .

Наконец, при бесконечно малом e выражение $\frac{l' - l}{e} - \frac{\lambda - \lambda'}{e}$ или $\frac{\xi}{e}$ будет не чем иным, как частной производной $\frac{\partial X}{\partial x}$ или $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$. Мы получим, следовательно, простой результат:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial X}{\partial x} = \int_t \frac{\frac{\partial k}{\partial a} (a - x) dt}{r^3} - \int_s \frac{k (a - x) \cos \chi ds}{r^3},$$

причем первое интегрирование производится по всему объему t , второе по всей его поверхности s .

Этот результат остается справедливым, как бы близко ни была расположена точка O у поверхности как с внутренней, так и с наружной стороны, лишь бы она не лежала на самой поверхности, где $\frac{\partial X}{\partial x}$ может иметь два различных значения. Первый интеграл при переходе через поверхность изменяется непрерывно, но интеграл

$$- \int_s \frac{k (a - x) \cos \chi ds}{r^3}$$

по теореме, которая будет доказана ниже, при переходе от точки, бесконечно близкой к поверхности с внутренней ее стороны, к точке, бесконечно близкой с внешней стороны, изменяется на конечную величину $4\pi k \cos \alpha$, где k и α отно-

сятся к месту перехода; этой же величине будет равна и разница между значениями частной производной $\frac{\partial X}{\partial x}$.

§ 10

Подобным же образом обозначая через β и γ углы, составляемые внешней нормалью к ds , со второю и третьей координатною осью и при том же, как и выше, ограничении относительно положения точки O , будем иметь:

$$\frac{\partial Y}{\partial y} = \int_t \frac{\frac{\partial k}{\partial b} (b - y) dt}{r^3} - \int_s \frac{k (b - y) \cos \beta ds}{r^3},$$

$$\frac{\partial Z}{\partial z} = \int_t \frac{\frac{\partial k}{\partial c} (c - z) dt}{r^3} - \int_s \frac{k (c - z) \cos \gamma ds}{r^3}.$$

Имея теперь в виду, что

$$\frac{a - x}{r} \frac{\partial k}{\partial a} + \frac{b - y}{r} \frac{\partial k}{\partial b} + \frac{c - z}{r} \frac{\partial k}{\partial c} = \frac{dk}{dr},$$

причем при этом дифференцировании изменяется только длина r , направление же сохраняется; что, далее,

$$\frac{a - x}{r} \cos \alpha + \frac{b - y}{r} \cos \beta + \frac{c - z}{r} \cos \gamma = \cos \psi,$$

где ψ есть угол между внешнею нормалью к ds и продолжением прямой r , мы видим, что если обозначить

$$\int_t \frac{dk}{dr} \frac{dt}{r^2} = M \quad \text{и} \quad \int_s \frac{k \cos \psi ds}{r^2} = N,$$

где t есть полный объем и s — полная его поверхность, то

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = M - N.$$

Чтобы выполнить первое интегрирование, опишем из центра O радиусом, равным единице, шаровую поверхность и

разобьем ее на элементы $d\sigma$. Прямые, проведенные из центра ко всем точкам контура $d\sigma$ и неопределенно продолженные, образуют конус (в широком смысле этого слова), который из полного объема t вырезает объем (который может состоять и из различных отдельных кусков), и $r^2 d\sigma dr$ будет произвольным элементом этого объема. Та часть M , которая относится к этому объему, будет, следовательно, $d\sigma \int \frac{\partial k}{\partial r} dr$, причем этот интеграл распространяется на все части прямой r , проведенной через O и какую-либо точку элемента $d\sigma$ и продолженной настолько, насколько это необходимо. Примем теперь, что эта прямая пересекает поверхность s , ограничивающую t , в точках O' , O'' , O''' , O'''' и т. д.; обозначим через r' , r'' , r''' , r'''' значения r для этих точек; через ds' , ds'' , ds''' , ds'''' — соответствующие элементы, вырезанные элементарными конусами на поверхности s , ограничивающей объем t ; через k' , k'' , k''' , k'''' — значения k , и, наконец, через ψ' , ψ'' , ψ''' , ψ'''' — значения ψ на указанных элементах.

Легко видеть, что

1) для случая, когда O лежит внутри t , число таких точек будет нечетное и интеграл $\int \frac{\partial k}{\partial r} dr$ надо будет брать в пределах от $r=0$ до $r=r'$, затем от $r=r''$ до $r=r'''$ и т. д.; отсюда следует, если обозначить через k^0 плотность в точке O , что

$$\int \frac{\partial k}{\partial r} dr = -k^0 + k' - k'' + k''' - k'''' \text{ и т. д.}$$

Так как углы ψ' , ψ'' , ψ''' , ψ'''' и т. д., очевидно, будут поочередно острыми и тупыми, то

$$\begin{aligned} ds' \cos \psi' &= +r'^2 d\sigma; \\ ds'' \cos \psi'' &= -r''^2 d\sigma; \\ ds''' \cos \psi''' &= +r'''^2 d\sigma; \\ ds'''' \cos \psi'''' &= -r''''^2 d\sigma \text{ и т. д.;} \end{aligned}$$

следовательно,

$$d\sigma \int \frac{\partial k}{\partial r} dr = -k^0 d\sigma + \frac{k' \cos \psi'}{r'^2} ds' + \frac{k'' \cos \psi''}{r''^2} ds'' + \\ + \frac{k''' \cos \psi'''}{r'''^2} ds''' + \dots = -k^0 d\sigma + \sum \frac{k \cos \psi}{r^2} ds,$$

причем суммирование распространяется на все ds , соответствующие элементу $d\sigma$. Интегрируя по всем $d\sigma$, получим

$$M = -4\pi k^0 + \int \frac{k \cos \psi}{r^2} ds = -4\pi k^0 + N;$$

следовательно,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi k^0;$$

2) для того случая, когда точка O лежит вне объема t , надо будет брать лишь те $d\sigma$, для которых прямая, проведенная через O и точку на $d\sigma$, пересекает объем t , число точек O' , O'' , O''' и т. д. будет четное, углы ψ' , ψ'' , ψ''' и т. д. будут поочередно тупые и острые, так что

$$ds' \cos \psi' = -r'^2 d\sigma; ds'' \cos \psi'' = +r''^2 d\sigma; ds''' \cos \psi''' = -r'''^2 d\sigma.$$

Здесь интегрирование $\int \frac{\partial k}{\partial r} dr$ ведется от $r=r'$ до $r=r''$, затем от $r=r'''$ до $r=r''''$ и т. д., так что

$$d\sigma \int \frac{\partial k}{\partial r} dr = \frac{k' \cos \psi'}{r'^2} ds' + \frac{k'' \cos \psi''}{r''^2} ds'' + \\ + \frac{k''' \cos \psi'''}{r'''^2} ds''' + \dots = \sum \frac{k \cos \psi}{r^2} ds,$$

и после второго интегрирования по всем $d\sigma$, подлежащим рассмотрению, получим

$$M = \int \frac{k \cos \psi}{r^2} ds = N;$$

следовательно,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

§ 11

Хотя в нашем доказательстве и было принято, что плотность во всем объеме t изменяется непрерывно, но это условие не является необходимым для результата нашей теоремы. Требуется лишь, чтобы в точке O плотность изменялась непрерывно во все стороны или чтобы точка O лежала внутри сколь угодно малого объема, удовлетворяющего этому условию. Действительно, если мы обозначим через V' потенциал массы, содержащейся в этом объеме, а потенциал масс, содержащихся вне этого объема, через V'' , то полный потенциал будет $V = V' + V''$, и так как по теореме предыдущего пункта

$$\frac{\partial^2 V'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V'}{\partial z^2} = -4\pi k^0,$$

$$\frac{\partial^2 V''}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V''}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V''}{\partial z^2} = 0,$$

то

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi k^0.$$

Но если это условие в точке O не выполнено и если эта точка лежит на поверхности раздела двух таких объемов, в каждом из которых плотность непрерывна, но при переходе из одного объема в другой изменяется скачком, то здесь, вообще говоря, производные $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ имеют каждая два различных значения, и это же имеет место и относительно их суммы, что и упомянуто в конце § 8.

§ 12

Мы рассматриваем, как уже отмечено выше, также и тот идеальный случай, когда силы притяжения и отталкивания предполагаются исходящими из частей *поверхности*, и позволяем себе сделать предположение, что действующая масса распределена по поверхности. Под плотностью в какой-либо

точке поверхности будем в этом случае подразумевать частное от деления массы, содержащейся на данном элементе поверхности, на этот элемент. Эта плотность может быть постоянной (т. е. во всех точках одна и та же) или переменной, и в этом последнем случае она может или быть по всей поверхности непрерывной (т. е. изменяться так, что в любых двух бесконечно близких точках будет различаться лишь бесконечно мало), или вся поверхность может распадаться на два или несколько участков, на каждом из которых имеет место непрерывное изменение, тогда как при переходе от одного участка к другому изменение плотности происходит скачком. Кроме того, можно также вообразить такое распределение, при котором вся масса остается конечной, но плотность в отдельных точках или по отдельным линиям является бесконечной. Сама поверхность, поскольку она не есть плоскость, будет обладать, вообще, непрерывной кривизною, не исключая при этом разрывов в отдельных точках (угловые точки) или в линиях.

При этих предположениях потенциал в каждой точке поверхности, где плотность не бесконечно велика, имеет определенное конечное значение, от которого значение потенциала в другой точке, лежащей на поверхности или вне ее бесконечно близко к первой точке, может отличаться лишь бесконечно мало;¹ иначе, потенциал изменяется непрерывно вдоль каждой линии, лежит ли она сама на поверхности или пересекает ее.

§ 13

Если обозначить через k плотность элемента поверхности ds , через a , b , c — координаты одной принадлежащей ему

¹ В конечности интеграла, выражающего потенциал, легко убедиться, разбивая поверхность на элементы, подобно тому как это будет показано в § 15; одновременно будет видно, что части поверхности, бесконечно близкие обеим точкам, добавляют к интегралу лишь бесконечно мало, — отсюда высказанное выше положение и может быть легко доказано.

точки, r — расстояние этой точки до точки O , координаты которой x, y, z , и V — потенциал массы, распределенной по поверхности, в точке O , так что $V = \int \frac{k ds}{r}$, причем интеграл берется по всей поверхности; наконец, если обозначить X, Y, Z — интегралы

$$\int \frac{k(a-x)}{r^3} ds, \quad \int \frac{k(b-y)}{r^3} ds, \quad \int \frac{k(c-z)}{r^3} ds,$$

то X, Y, Z будут вполне соответствовать $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}$ до тех пор, пока точка O лежит вне поверхности, но, строго говоря, это не имеет места, если O есть точка самой поверхности; и разница эта представляется различным образом, смотря по роду угла, составляемого нормалью к поверхности с соответствующей координатной осью. Очевидно, достаточно провести рассуждение только относительно первой координатной оси.

I. Если указанный угол равен нулю, то интеграл X имеет определенное значение; $\frac{\partial V}{\partial x}$, напротив, имеет два различных значения, смотря по тому, будет ли dx положительно или отрицательно.

II. Если же этот угол прямой, то выражение для X не допускает интегрирования (причем тогда имеет место такое же замечание, как в § 7), при этом $\frac{\partial V}{\partial x}$ имеет только одно определенное значение.

III. Если угол острый, то относительно X имеет место сказанное во втором случае, относительно $\frac{\partial V}{\partial x}$ — сказанное в первом случае.

Кроме этих, имеют еще место другие особенности, когда в точке O происходит разрыв непрерывности в плотности или в кривизне. Для главной нашей цели нет надобности подробно рассматривать такие исключительные случаи, которые могут встретиться лишь в отдельных точках или по

отдельным линиям, и поэтому при ближайшем рассмотрении предмета мы примем, что во всех точках, с которыми мы имеем дело, имеет место определенная конечная плотность и существует определенная касательная плоскость.

§ 14

Прежде чем приступить к общему исследованию, будет полезно рассмотреть простой частный случай. Пусть поверхность есть часть A шаровой поверхности и плотность на ней постоянна, т. е. k постоянно, так что V и X представляют значения интегралов

$$V = \int \frac{k ds}{r}, \quad X = \int \frac{k(a-x)}{r^3} ds,$$

взятых по всей части A ; обозначим через V' и X' эти же интегралы, взятые по остальной части шаровой поверхности B , и через V^0 и X^0 — интегралы, взятые по всей поверхности шара; таким образом, $V = V^0 - V'$; $X = X^0 - X'$. Радиус шара обозначим через R , начало координат возьмем в центре шара и положим $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; это будет расстояние точки O от центра шара.

Уже известно, что $V^0 = 4\pi kR$, если точка O лежит внутри шара, и $V^0 = \frac{4\pi kR^2}{\rho}$, если точка O лежит вне; на самой поверхности оба значения совпадают. Производная $\frac{\partial V^0}{\partial x}$ будет равна нулю внутри шара и будет равна $-\frac{4\pi kR^2 x}{\rho^3}$ вне; на поверхности шара имеют место одновременно оба значения сообразно знаку dx ; эти значения будут только тогда равны, когда $x = 0$, что соответствует случаю II предыдущего параграфа.

Выражение X^0 , которое вне и внутри шара эквивалентно $\frac{\partial V^0}{\partial x}$, на поверхности шара теряет смысл, ибо интегрирование недопустимо, за исключением единственного случая, когда

для бесконечно близких элементов поверхности величина $(a - x)$ является бесконечно малой, порядка выше r ; именно, когда $y = 0$, $z = 0$, $x = \pm R$, для этого случая интегрирование дает $X^0 = \pm 2\pi k$, т. е. X^0 не совпадает ни с одним из значений $\frac{\partial V^0}{\partial x}$, а, скорее, со средним из двух; очевидно, что этот случай относится к случаю I предыдущего параграфа.

Если взять теперь точку O на поверхности шара внутри A , то X' и $\frac{\partial V'}{\partial x}$ будут эквивалентны и будут иметь непрерывно изменяющиеся значения; ясно, что связь между $X^0 - X'$ и $\frac{\partial V^0}{\partial x} - \frac{\partial V'}{\partial x}$, т. е. между X и $\frac{\partial V}{\partial x}$, совершенно та же, как между X^0 и $\frac{\partial V^0}{\partial x}$; отсюда высказанные в предыдущем пункте теоремы следуют сами собой.

§ 15

Для общего исследования выгодно брать начало координат в точке P , лежащей на самой поверхности, и первую координатную ось направлять перпендикулярно касательной плоскости в P . Если обозначить через ψ угол между нормалью к произвольному элементу поверхности ds и первой координатной осью, то $\cos \psi ds$ будет проекцией ds на плоскость bc ; и если положить

$$\sqrt{b^2 + c^2} = \rho, \quad b = \rho \cos \theta, \quad c = \rho \sin \theta,$$

то $\rho d\rho d\theta$ будет любой элемент этой плоскости, и соответствующий элемент поверхности будет $ds = \frac{\rho d\rho d\theta}{\cos \psi}$; соответствующий элемент массы будет $= h\rho d\rho d\theta$, если для краткости положить $h = \frac{k}{\cos \psi}$.

Будем теперь исследовать, каким скачком изменяется значение X , когда точка O первой координатной оси переходит с одной стороны поверхности на другую, иначе x от

отрицательных значений переходит в положительные. Для этого вопроса, очевидно, безразлично, рассматривать ли всю поверхность или лишь любую малую ее часть, внутри которой лежит точка P , ибо влияние прочих частей поверхности на значение X изменяется непрерывно. Поэтому возможно изменять ρ от нуля только до любой малой величины ρ' и предположить, что на ограниченной таким образом поверхности h и $\frac{a}{\rho}$ везде изменяются непрерывно. Если положить что при любом определенном значении θ интеграл

$$\int_0^{\rho'} \frac{h(a-x)\rho d\rho}{r^3} = Q,$$

то

$$X = \int_0^{2\pi} Q d\theta.$$

Вопрос состоит в том, чтобы сравнить между собою значения X при $x=0$ для бесконечно малого положительного x и для бесконечно малого отрицательного (другие две координаты y и z принимаются во всех случаях равными нулю). Мы обозначим эти три значения X через X^0 , X' и X'' и соответствующие значения Q через Q^0 , Q' и Q'' .

Так как

$$r = \sqrt{(a-x)^2 + \rho^2},$$

то, считая θ постоянным, получим

$$d \frac{h(a-x)}{r} = - \frac{h(a-x)\rho d\rho}{r^3} + \frac{\partial h}{\partial \rho} \frac{a-x}{r} d\rho + \frac{\partial a}{\partial \rho} \frac{h\rho^2}{r^3} d\rho;$$

следовательно,

$$Q = \int \frac{\partial h}{\partial \rho} \frac{a-x}{r} d\rho + \int \frac{\partial a}{\partial \rho} \frac{h\rho^2}{r^3} d\rho - \frac{h'(a'-x)}{r'} + \text{const},$$

причем оба интеграла берутся от $\rho=0$ до $\rho=\rho'$ и значения h , a , r при $\rho=\rho'$ обозначены через h' , a' , r . За постоянную

надо принять значение $\frac{h(a-x)}{r}$ при $\rho = 0$, которое, если обозначить плотность в P через k^0 , будет при положительном x равно $-k^0$ и при отрицательном $+k^0$, причем при $\rho = 0$ будет, очевидно, $a = 0$, $\psi = 0$, $h = k^0$, $x = \pm r$. Для случая же $x = 0$ за постоянную надо принять предельное значение отношения $\frac{ha}{r}$ при бесконечно убывающем ρ , которое равно нулю, так как a является бесконечно малой величиной более высокого порядка, чем r .

Значение интеграла $\int \frac{\partial h}{\partial \rho} \frac{a-x}{r} d\rho$ остается неизменным с точностью до бесконечно малой разности, взять ли $x = 0$ или бесконечно малым $x = \pm \epsilon$.

При разложении этого интеграла на два

$$\int_0^{\delta} \frac{\partial h}{\partial \rho} \frac{a-x}{r} d\rho + \int_{\delta}^{\delta'} \frac{\partial h}{\partial \rho} \frac{a-x}{r} d\rho$$

становится ясным, что сказанное имеет место для первой части, когда δ бесконечно мало, и для второй, когда $\frac{\delta}{\epsilon}$ бесконечно велико, следовательно, и для их суммы, когда δ есть бесконечно малая величина порядка ниже, чем ϵ .

Подобное же заключение относится и к интегралу $\int \frac{\partial a}{\partial \rho} \frac{h\rho^2}{r^3} d\rho$, когда точки поверхности, отвечающие определенному значению θ , образуют кривую, имеющую в точке P измеримую кривизну, так что $\frac{a}{\rho^2}$ в рассматриваемом пространстве имеет непрерывно изменяющееся значение; именно, если обозначить это значение через A , то

$$\frac{\partial a}{\partial \rho} = 2A\rho + \frac{\partial A}{\partial \rho} \rho^2,$$

так что рассматриваемый интеграл разложится на следующие два:

$$\int \frac{2\rho A h d\rho}{r^3} + \int \frac{\partial A}{\partial \rho} \frac{\rho^4}{r^3} h d\rho,$$

для которых пригодность приведенного выше рассуждения ясна сама собою.

Наконец, значения $\frac{h'(a' - x)}{r'}$ для всех трех значений x равны между собою с точностью до бесконечно малых разностей.

Отсюда следует, что величины $Q' + k^0$, Q' , $Q'' - k^0$ равны между собою с точностью до бесконечно малых разностей и, следовательно, то же будет справедливо для интегралов

$$\int (Q' + k^0) d\theta, \quad \int Q^0 d\theta, \quad \int (Q'' - k^0) d\theta,$$

или для величин

$$X' + 2\pi k^0, \quad X^0, \quad X'' - 2\pi k^0.$$

Эту важную теорему можно выразить и так: предельное значение X при бесконечно малом положительном x есть $X^0 - 2\pi k^0$; при бесконечно малом отрицательном x оно равно $X^0 + 2\pi k^0$, т. е. X два раза изменяет свое значение скачком, равным $-2\pi k^0$, именно — первый раз, когда x , переходя от отрицательного значения к положительному, достигает нуля и второй раз, когда x переходит через нуль^[9].

§ 16

В предыдущем параграфе предположено при доказательстве, что сечения поверхности плоскостями, проведенными через первую координатную ось, имеют в точке P измеримую кривизну, но наш результат остается справедливым и тогда, когда кривизна в P бесконечно велика, за исключением единственного случая. То обстоятельство, что при бесконечно малом ρ отношение $\frac{a}{\rho}$ должно становиться бесконечно малым, уже предполагает существование в точке P определенной касательной плоскости, но обе величины будут одинакового порядка лишь тогда, когда радиус кривизны конечный; при

бесконечно малом радиусе кривизны $\frac{a}{\rho}$ будет порядка ниже, нежели ρ . Мы покажем, что даже в последнем случае наши результаты остаются справедливыми, если только порядки обеих величин будут сравнимы между собою.

Допустим, что $\frac{a}{\rho}$ того же порядка, как ρ^μ , причем μ обозначает конечный положительный показатель, т. е. $\frac{a}{\rho^{1+\mu}}$ есть для рассматриваемого пространства конечная, непрерывно изменяющаяся величина, которую обозначим через B . Интеграл $\int \frac{\partial a}{\partial \rho} \frac{h\rho^2}{r^3} d\rho$ разлагается на следующие два:

$$\int \frac{(1+\mu)\rho^{2+\mu} hB}{r^3} d\rho + \int \frac{\rho^{3+\mu}}{r^3} \frac{\partial B}{\partial \rho} h d\rho.$$

Ко второму интегралу заключения предыдущего параграфа применимы непосредственно, к первому — после простого преобразования. Положим $\frac{1}{\mu} = m$; $\rho^\mu = \sigma$ или $\rho = \sigma^m$; тогда первый интеграл будет:

$$m+1 \int \frac{Bh\sigma^{3m} d\sigma}{[\sigma^{2m} + (a-x)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Этот интеграл имеет, очевидно, бесконечно малое значение, если интегрирование происходит от нуля до σ , равного бесконечно малому. При всяком же конечном значении σ коэффициент под знаком интеграла принимает с точностью до бесконечно малой разности одинаковые значения, взять ли $x=0$ или x равным бесконечно малому. Это относится и ко всему интегралу, взятому от $\sigma=0$ до $\sigma=\sqrt[m]{\rho}$.

Лишь в одном единственном случае наши заключения теряют свою справедливость, — именно, когда $\frac{a}{\rho}$ не может быть приведено к одному порядку, какова бы ни была степень ρ , например если $\frac{a}{\rho}$ было бы порядка $\frac{1}{\log \frac{1}{\rho}}$. В этом случае

Q при бесконечном приближении точки O к поверхности стало бы неопределенно возрастать, это относилось бы и к X , если только это имело бы место не для некоторых значений θ , но для всяких. Но нет надобности развивать это здесь дальше, ибо этот особенный случай можно без ущерба исключить из нашего исследования.

§ 17

Мы рассмотрим теперь, при тех же предположениях и обозначениях, как в § 15, величину Y , элемент которой есть $\frac{h b db dc}{r^3}$. Так как $r = \sqrt{b^2 + c^2 + (a - x)^2}$ и, следовательно,

$$\frac{\partial \frac{h}{r}}{\partial b} = -\frac{hb}{r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial b} - \frac{h(a-x)}{r^3} \frac{\partial a}{\partial b},$$

ибо c рассматривается как постоянная, то первое интегрирование дает при этом:

$$\int \frac{hb db}{r^3} = \frac{h^*}{r^*} - \frac{h^{**}}{r^{**}} + \int \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial b} db - \int \frac{h(a-x)}{r^3} \frac{\partial a}{\partial b} db,$$

где интегрирование для всякого определенного значения c производится от наименьшего до наибольшего значения b , и h^* , r^* , h^{**} , r^{**} означают соответствующие предельные значения h и r . Положим для сокращения:

$$\frac{h^*}{r^*} - \frac{h^{**}}{r^{**}} = T, \quad \frac{\rho}{r} \frac{\partial h}{\partial b} - \frac{h(a-x)}{r^3} \frac{da}{db} = U;$$

тогда

$$Y = \int T dc + \iint \frac{U}{\rho} db dc,$$

причем интегрирование по c должно производиться от наименьшего значения этой координаты до наибольшего, которое она имеет на поверхности. В двойном интеграле $db dc$ представляет проекцию элемента поверхности на плоскость b, c ; вместо этой величины можно писать $\rho d\rho d\theta$, тогда

$$Y = \int T dc + \iint U d\rho d\theta,$$

причем в двойном интеграле ρ должно меняться от $\rho=0$ до $\rho=\rho'$ и θ от $\theta=0$ до $\theta=2\pi$. Рассуждениями, подобными сделанным в § 15, нетрудно заключить, что это выражение с точностью до бесконечно малых разностей принимает одинаковые значения при $x=0$ и при x , равном бесконечно малому, иными словами, что Y имеет как при положительном, так и при отрицательном бесконечно убывающем x один и тот же предел, и этот предел есть не что иное, как значение предыдущей формулы, если в ней положить $x=0$. По аналогии обозначим эту величину через Y^0 , но необходимо заметить, что нельзя говорить, что это есть значение $\int \frac{k b d s}{r^3}$ при $x=0$ (ибо это выражение при $x=0$ не допускает интегрирования), но что это есть одно из значений этого интеграла, — именно то, которое получается, если интегрирование производить в указанном порядке.

Кроме того, этот результат (подобно тому, как в § 16) подлежит ограничению в особенном случае, — когда в точке P радиусы кривизны бесконечно малы, также, когда в этой точке $\frac{\partial h}{\partial b}$ бесконечно велико; для нашей цели, однако, бесполезно рассматривать эти исключительные случаи, которые могут встречаться только в отдельных точках или линиях (т. е. не в частях поверхности, а лишь на границах этих частей).

Наконец, само собою очевидно, что величина Z или интеграл $\int \frac{k c d s}{r^3}$ следует совершенно тем же законам, как и Y , т. е. что этот интеграл, когда точка O , двигаясь по первой координатной оси, приближается к точке P , имеет одинаковый предел Z^0 , происходит ли приближение с положительной стороны или с отрицательной стороны, и что это предельное значение есть в то же самое время и значение $\iint \frac{h c d c d b}{r^3}$ при $x=0$, если производить интегрирование сперва по c .

§ 18

Если заметить теперь, что $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ во всех точках пространства, не лежащих на самой поверхности, непременно одинаковы с X , Y , Z и что V везде изменяется непрерывно, то из результатов предыдущего параграфа легко выводится, что в бесконечно малом расстоянии от P , т. е. для бесконечно малых значений x , y , z , значение V с точностью до бесконечно малых величин высшего порядка выражается следующим образом:

$$V^0 + x(X^0 - 2\pi k^0) + yY^0 + zZ^0, \text{ когда } x > 0,$$

и

$$V^0 + x(X^0 + 2\pi k^0) + yY^0 + zZ^0, \text{ когда } x < 0,$$

причем V^0 обозначает значение V в точке P , т. е. при $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Рассматривая значение V на прямой линии, проведенной через P , составляющей с осями координат углы A , B , C , и обозначая через t некоторую длину, отложенную по этой линии, и через t^0 значение t в точке P , получим, когда $t - t^0$ бесконечно мало, с точностью до бесконечно малых высшего порядка:

$$V = V^0 + (t - t^0)(X^0 \cos A + Y^0 \cos B + Z^0 \cos C \mp 2\pi k^0 \cos A);$$

верхний знак — для положительных, нижний — для отрицательных значений $(t - t^0) \cos A$; иначе $\frac{\partial V}{\partial t}$ для острого угла A имеет в точке P два различных значения:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = X^0 \cos A + Y^0 \cos B + Z^0 \cos C - 2\pi k^0 \cos A, \text{ если } dt > 0,$$

и

$$\frac{\partial V}{\partial t} = X^0 \cos A + Y^0 \cos B + Z^0 \cos C + 2\pi k^0 \cos A, \text{ если } dt < 0.$$

Для того случая, когда $A = \frac{\pi}{2}$, т. е. прямая касается поверхности, оба выражения совпадают и

$$\frac{\partial V}{\partial t} = Y^0 \cos B + Z^0 \cos C.$$

Выведенные до сих пор предложения по своей сущности не являются новыми, но их надо было привести для связи и для подготовки к следующим исследованиям, в которых будет развит ряд новых теорем.

§ 19

Пусть V есть потенциал системы масс $M', M'', M''', \dots$, находящихся в точках $P', P'', P''', \dots$; v — потенциал второй системы масс $m', m'', m''', \dots$, находящихся в точках $p', p'', p''', \dots$; пусть $V', V'', V''', \dots$ — значения V в этих последних точках и $v', v'', v''', \dots$ — значения v в точках $P', P'', P''', \dots$; тогда имеет место соотношение:

$$M'v' + M''v'' + M'''v''' + \dots = m'V' + m''V'' + m'''V''' + \dots$$

Это равенство можно писать так:

$$\sum Mv = \sum mV,$$

если обозначить через M каждую из масс первой системы и через m каждую массу второй системы. В самом деле, как сумма $\sum Mv$, так и $\sum mV$ есть не что иное, как сумма всех соединений $\frac{Mm}{\rho}$, где ρ обозначает взаимное расстояние между точками, в которых находятся массы M и m .

Если массы одной системы или обеих находятся не в отдельных точках, но распределены непрерывно на линиях, поверхностях или в объемах, то вышеприведенное равенство сохраняется, если заменить в нем суммы соответствующими интегралами.

Если, например, массы второй системы распределены по поверхности так, что на элемент поверхности ds приходится масса kds , то

$$\sum Mv = \int kVds,$$

и если подобное относится и к первой системе, так что элемент площади dS имеет массу KdS , то

$$\int KvdS = \int kVds.$$

По отношению к последнему случаю важно заметить, что это равенство сохраняется, когда обе поверхности совпадают; ради краткости мы лишь приведем эту теорему без строгого ее доказательства. Именно, нетрудно показать, что оба интеграла, поскольку они относятся к одной и той же поверхности, являются пределами интегралов, относящихся к двум разделенным поверхностям, когда расстояние между поверхностями бесконечно уменьшается, для чего достаточно взять обе поверхности равными и между собою параллельными. Непосредственно ясным это доказательство может считаться только тогда, когда обе поверхности таковы, что нормали во всех их точках составляют с некоторой прямой острые углы. Поверхность, этому условию не удовлетворяющая (как это всегда будет относительно замкнутой поверхности), сперва должна быть разбита на две или на несколько частей, для которых указанное условие выполнено, после чего этот случай легко приводится к предыдущим.

§ 20

Если теорему предыдущего пункта применить к случаю, где вторая система масс имеет одинаковую везде плотность $k=1$, и массы распределены по поверхности шара радиуса R , то потенциал $v=4\pi R$ внутри шара; снаружи шара в каждой точке, расстояние которой от центра $=r$, будет $v=\frac{4\pi R^2}{r}$, т. е.

потенциал будет таким же, каким был бы в центре шара потенциал массы $4\pi R^2$, расположенной в упомянутой точке. На поверхности шара оба значения v совпадают. Если первая система находится целиком внутри шара, то $\sum Mv$ будет равна полной массе этой системы, умноженной на $4\pi R$; если же эта система находится целиком снаружи шара, то $\sum Mv$ будет равна произведению потенциала этой массы в центре шара, умноженной на $4\pi R^2$; наконец, если первая система масс распределена по поверхности шара непрерывно, то оба выражения для $\int KvdS$ равносильны. Отсюда следует:

Теорема. Если V означает потенциал массы, распределенной по элементам ds поверхности шара, описанного радиусом R , то после интегрирования по всей поверхности шара

$$\int Vds = 4\pi [RM^0 + R^2V^0],$$

где M^0 есть полная масса, находящаяся внутри шара, и V^0 есть потенциал в центре шара массы, находящейся снаружи шара, причем массы, распределенные непрерывно по поверхности шара, можно считать по желанию наружными или внутренними ^[10].

§ 21

Теорема. Потенциал V масс, лежащих вне сплошного объема, не может иметь в одной части этого объема постоянное значение и в другой части того же объема другое значение.

Доказательство. Положим, что в каждой точке объема A потенциал постоянно равен a , и в каждой точке другого объема B , граничащего с объемом A и не содержащего масс, значение потенциала (алгебраически) больше, чем a . Построим шар, часть которого находится в B , другая часть вместе с центром заключена в A ; такое построение всегда возможно. Пусть R есть радиус этого шара и

ds — элемент его поверхности, тогда по теореме предыдущего параграфа интеграл $\int V ds = 4\pi R^2 a$ и $\int (V - a) ds = 0$, что невозможно, ибо для части поверхности, лежащей в A , будет $V - a = 0$, а для остальной части, согласно предположению, не равно нулю, а положительно.

Подобным же образом ясна невозможность того, чтобы во всех точках объема, граничащего с A , было бы V меньше, нежели a .

Очевидно, что должен был бы иметь место, по крайней мере, один из этих случаев, если бы теорема была неверна. Эта теорема содержит следующие два следствия:

I. Если слой, в объеме которого содержатся массы, охватывает собою пространство, не содержащее масс, и если потенциал в одной части этого пространства имеет постоянное значение, то это имеет место для всех точек пространства, охватываемого слоем.

II. Если потенциал масс, заключенных в конечном объеме, имеет постоянную величину в какой-либо части внешнего пространства, то это относится и ко всему бесконечному внешнему пространству.

Вместе с этим нетрудно видеть, что в этом втором случае постоянное значение потенциала не может быть иное, как 0, ибо если через M обозначить сумму всех положительных или сумму всех отрицательных масс, взятых отдельно, смотря по тому, какая сумма больше, то потенциал в точке, расстояние которой до ближайшей массы равно r , во всяком случае будет, по абсолютному значению, меньше, нежели $\frac{M}{r}$; эта величина во внешнем пространстве может быть меньше любой наперед назначенной величины.

§ 22

Теорема. Если ds есть элемент поверхности, ограничивающий сплошной объем, P — сила, с которой действуют на элемент ds распределенные как угодно массы по направле-

нию нормали к поверхности, причем сила, направленная внутрь или наружу, считается положительной, смотря по тому, притягивающие или отталкивающие массы считаются положительными, то интеграл $\int Pds$, распространенный по всей поверхности, равен

$$4\pi M + 2\pi M',$$

причем M есть сумма масс, находящихся внутри объема, M' — сумма масс, распределенных непрерывно по поверхности^[11].

Доказательство. Если обозначить через $Ud\mu$ ту часть силы P , которая происходит от элемента массы $d\mu$, через r — расстояние элемента $d\mu$ до ds и через u — угол, составленный при ds внутренней нормалью с r , то $U = \frac{\cos u}{r^2}$. Но для каждого определенного $d\mu$, согласно теореме, доказанной в п. 6 „Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum“, $\int \frac{\cos u}{r^2} ds = 0$, или 2π , или 4π , смотря по тому, лежит ли $d\mu$ вне объема, ограниченного поверхностью, на самой поверхности или внутри объема. Так как $\int Pds$ есть совокупность всех $d\mu \int Uds$, то высказанная теорема следует отсюда сама собою.

По отношению к вспомогательной теореме, которой мы пользовались, необходимо заметить, что в том виде, как она в цитированном месте высказана, она требует некоторого изменения для одного специального случая. Именно, r означает расстояние *заданной точки* от элемента ds , и для случая, когда эта точка лежит на самой поверхности, формула $\int \frac{\cos u}{r^2} ds = 2\pi$ верна лишь в предположении непрерывности кривизны в рассматриваемой точке. Но разрыв непрерывности имеет место, когда точка лежит на грани или в углу, и тогда вместо 2π надо подставить телесный угол, соответствующий той фигуре, которая вырезается на вспо-

могательной сфере радиуса 1, центром которой является заданная точка, всеми выходящими из этой точки касательными к поверхности. Но так как подобные исключительные случаи относятся лишь к линиям или точкам, а не частям поверхности, т. е. относятся только к границам между частями поверхности, то очевидно, что это не имеет значения для применения здесь указанной вспомогательной теоремы.

§ 23

Проведем через каждую точку поверхности нормаль и обозначим через p расстояние некоторой ее точки от начальной, взятой на поверхности, внутренняя сторона которой принимается за положительную. Потенциал масс V можно рассматривать как функцию от p и двух других переменных, которые тем или иным образом служат для отличия отдельных точек поверхности друг от друга; совершенно то же относится и к частной производной $\frac{\partial V}{\partial p}$, значение которой нам понадобится здесь лишь для точки, лежащей на поверхности, т. е. для $p=0$. Так как величина $\frac{\partial V}{\partial p}$ будет вполне одинакова с P , когда массы будут распределены или только внутри рассматриваемого объема, или вне его, или и внутри и вне, но не будет масс, распределенных по своей поверхности, то в этом случае будет

$$\int \frac{\partial V}{\partial p} ds = 4\pi M.$$

Напротив, в том случае, когда вся масса распределена только по поверхности, так что элемент ds несет массу kds , то $\frac{\partial V}{\partial p}$ и P не являются равнозначущими; последняя величина представляет здесь, очевидно, по отношению к p то же самое, что X^0 по отношению к x в § 15; но $\frac{\partial V}{\partial p}$ имеет два различных значения, именно $P - 2\pi k$ и $P + 2\pi k$, смотря по

тому, dp положительное или отрицательное. Так как интеграл $\int kds$ равен всей массе M' , распределенной по поверхности, и, соответственно теореме предыдущего параграфа, $\int Pds = 2\pi M'$, то

$$\int \frac{\partial V}{\partial p} ds = 0 \quad \text{или} \quad \int \frac{\partial V}{\partial p} ds = 4\pi M',$$

смотря по тому, понимается ли под $\frac{\partial V}{\partial p}$ значение для внутренней или для наружной стороны поверхности; поэтому интеграл $\int \frac{\partial V}{\partial p} ds$ в первом случае будет соответствовать тому, как если бы масса M' принадлежала к внешнему пространству, во втором — как будто бы она принадлежала к внутреннему. Поэтому при любом распределении масс имеет место равенство

$$\int \frac{\partial V}{\partial p} ds = 4\pi M,$$

причем под M надо разумеать массы, лежащие внутри объема; и если есть массы, распределенные по поверхности, их надо причислить к внутренним или исключить их, смотря по тому, берется ли $\frac{\partial V}{\partial p}$ для наружной стороны или для внутренней.

Поэтому, если внутри объема масс не содержится, то

$$\int \frac{\partial V}{\partial p} ds = 0,$$

если понимать под $\frac{\partial V}{\partial p}$ значение этой производной, относящееся к внутренней стороне поверхности.

§ 24

При тех же предположениях, как в конце предыдущего пункта, обозначая через T объем, о котором идет речь, и обозначая через q полную силу, действующую на элемент dT ,

происходящую как от масс, лежащих вне объема, так и от масс, распределенных по его поверхности непрерывно, мы получим следующую важную теорему.

Теорема. Интеграл $\int V \frac{\partial V}{\partial p} ds = - \int q^2 dT$, причем первый интеграл берется по всей поверхности, второй по всему объему T .

Доказательство. Введя прямоугольные координаты x, y, z , рассмотрим сперва прямую, параллельную оси x , пересекающую объем T , считая величины y и z , таким образом, постоянными. Из тождества

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(V \frac{\partial V}{\partial x} \right) = \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + V \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

следует, что интеграл

$$\int \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + V \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right],$$

взятый по той же части той прямой, которая лежит внутри объема T , равен разности значений $V \frac{\partial V}{\partial x}$ в конечной и начальной точке, если прямая пересекает граничащую поверхность только два раза или вообще равна $\sum \varepsilon V \frac{\partial V}{\partial x}$, причем за $V \frac{\partial V}{\partial x}$ берутся отдельные значения в различных точках пересечения, при этом $\varepsilon = -1$ для нечетных точек пересечения (т. е. первой, третьей и т. д.) и $\varepsilon = +1$ для четных. Рассматривая далее призматический объем, поперечным сечением которого является прямоугольник $dy dz$, элементом $dx dy dz$, получим, что интеграл

$$\int \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + V \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right] dT = \sum \varepsilon V \frac{\partial V}{\partial x} dy dz,$$

причем интеграл берется по той части T , которая лежит в указанном призматическом объеме. Эта призма вырезает из граничной поверхности два или, вообще, четное число

элементов, и если обозначить их через ds и через ξ угол, составляемый осью x и нормалью к ds , направленной внутрь, то будет

$$dy dz = \pm \cos \xi ds,$$

причем верхний знак берется для нечетного, нижний — для четного числа точек пересечения. Следовательно, вышеупомянутый интеграл равен $-\sum V \frac{\partial V}{\partial x} \cos \xi ds$, причем суммирование производится по всем соответствующим элементам поверхности. Если весь объем будет разбит на такие призматические элементы, то и все соответствующие элементы поверхности покроют ее целиком, и тогда

$$\int \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + V \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right] dT = - \int V \frac{\partial V}{\partial x} \cos \xi ds,$$

причем в первой части интегрирование производится по всему объему T , в левой — по всей поверхности. Но очевидно, что $\cos \xi$ равен частной производной $\frac{\partial x}{\partial p}$, причем p имеет указанное в § 23 значение, и x есть функция от p и двух других переменных, которыми определяются положения точек поверхности; следовательно,

$$\int \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + V \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right] dT = - \int V \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial p} ds.$$

Впрочем, очевидно само собою, что в случае, если поверхность содержит массы и, следовательно, $\frac{\partial V}{\partial x}$ имеет два различных значения, здесь надо брать то, которое относится к внутреннему объему.

Совершенно подобными заключениями найдем:

$$\int \left[\left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + V \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right] dT = - \int V \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial p} ds,$$

$$\int \left[\left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 + V \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right] dT = - \int V \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial p} ds.$$

Сложив все эти равенства и заметив, что во всем объеме T

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 = q^2$$

и что на граничной поверхности

$$\frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial p} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial p} = \frac{\partial V}{\partial p},$$

получим

$$\int q^2 dT = - \int V \frac{\partial V}{\partial p} ds [12].$$

Это и есть наша теорема, которая, если привлечь последнее предложение предыдущего параграфа, может быть выражена в более общем виде:

$$\int q^2 dT = \int (A - V) \frac{\partial V}{\partial p} ds,$$

где A означает любую постоянную величину.

§ 25

Теорема. Если при предположениях предыдущего параграфа потенциал V во всех точках ограничивающей объем T поверхности имеет одно и то же значение, то это значение относится также и ко всем точкам этого объема, и во всем объеме имеет место полное уничтожение сил.

Доказательство. Если в обобщенной теореме предыдущего пункта принять за A постоянное граничное значение потенциала, то ясно, что

$$\int q^2 dT = 0;$$

следовательно, q должно быть равно нулю во всех точках пространства T , т. е.

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0,$$

и, значит, V во всем объеме T постоянно.

§ 26

Теорема. Если потенциал масс, находящихся только внутри конечного объема T , или целиком, или частью распределенных непрерывно по его поверхности S , во всех точках поверхности S имеет постоянное значение, равное A , то потенциал в любой точке O внешнего бесконечного пространства T' будет, во-первых, равен нулю, если $A=0$, во-вторых, меньше A и того же знака, если $A \neq 0$.

Доказательство. I. Прежде всего надо доказать, что потенциал в точке O не может иметь значения вне пределов 0 и A . Допустим, что в точке O имеет место такое значение B потенциала; обозначим через C произвольную величину, заключенную одновременно между B и 0 и между B и A . Если из O провести по всем направлениям прямые линии, то на каждой из них будет такая точка O' , в которой потенциал равен C и притом так, что вся линия OO' принадлежит пространству T' ; это следует непосредственно из непрерывного изменения потенциала, который при достаточном продолжении прямой или переходит из B в A , или бесконечно убывает, смотря по тому, пересекает ли прямая поверхность S или нет (см. замечание в конце § 21). Совокупность точек O' образует тогда замкнутую поверхность, а так как на ней потенциал постоянный и равен C , то, согласно теореме предыдущего параграфа, он должен иметь это же значение и во всех точках объема, ограниченного этой поверхностью, а так как в точке O потенциал имеет значение B , отличающееся от C , то наше предположение приводит к противоречию.

Для случая, когда $A=0$, наша теорема этим самым полностью доказана. Для второго случая, когда $A \neq 0$, потенциал, как это ясно, ни в одной точке пространства T' не может быть больше A или обладать обратным ему знаком.

II. Чтобы сделать наше доказательство полным, для второго случая опишем около точки O , как центра, шаровую

поверхность радиусом R — меньшим, чем наименьшее расстояние точки O от S ; разобьем поверхность шара на элементы ds и обозначим потенциал каждого элемента через V , потенциал в точке O обозначим опять через B .

Согласно теореме § 20, интеграл, взятый по всей поверхности шара, будет тогда

$$\int V ds = 4\pi R^2 B, \text{ значит } \int (V - B) ds = 0.$$

Это равенство может существовать или тогда, когда V во всех точках поверхности шара постоянно и равно B , или тогда, когда V в разных частях поверхности шара отличается от B в противоположные стороны. При первом предположении, согласно § 25, потенциал во всем объеме шара, а значит, по теореме § 21, во всем неограниченном пространстве T' , был бы постоянным и притом равным нулю, что находится в противоречии с предположением, что на границе этого пространства, на поверхности S , потенциал отличается от нуля, и противоречит невозможности для потенциала изменяться скачком. Второе предположение было бы в противоречии с доказанным в п. I, если бы B было равно 0 или равно A , поэтому B должно лежать между 0 и A .

§ 27

Т е о р е м а. В теореме предыдущего параграфа первый случай, т. е. значение постоянного потенциала A , равное нулю, может иметь место только тогда, когда сумма всех масс равна нулю; второй же случай — только тогда, когда эта сумма не равна нулю.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть ds есть элемент поверхности шара, заключающей объем T , R — его радиус, M — сумма всех масс, и V — их потенциал в точке ds . Согласно теореме § 20, интеграл $\int V ds = 4\pi RM$; в первом случае, т. е. когда $A = 0$, по предыдущей теореме потенциал $V = 0$ во всех точках поверхности шара; во втором же случае — меньше A , но оди-

накового с ним знака; поэтому в первом случае будет $4\pi RM=0$, т. е. $M=0$; во втором случае $\int V ds=4\pi RM$, и M должно иметь одинаковый знак с A . Вместе с тем ясно, что в этом втором случае $4\pi RM < \int A ds$, т. е. $4\pi R^2 A$, значит $M < RA$, или $A > \frac{M}{R}$.

Вторая часть этой теоремы, в соединении с теоремою предыдущего параграфа, может быть высказана следующим образом.

Если массы, содержащиеся в объеме, ограниченном замкнутой поверхностью, или частью непрерывно распределенные на самой поверхности, таковы, что их алгебраическая сумма равна нулю и их потенциал во всех точках поверхности имеет постоянное значение, то это значение будет равно нулю также и во всем внешнем бесконечном пространстве, и, значит, во всем этом внешнем пространстве действие сил, происходящих от указанных масс, будет вполне уничтожаться.

§ 28

Легко убедиться, что все заключения двух предыдущих параграфов сохраняются, когда S не есть замкнутая поверхность и массы лежат лишь на ней. Здесь объем T отпадает; все точки, которые не лежат на самой поверхности, принадлежат бесконечному внешнему пространству, и если потенциал по всей поверхности имеет постоянное значение A , не равное нулю, то это значение вне поверхности везде будет меньше A и одинакового с ним знака.

То, что относится к первому случаю $A=0$, остается и здесь справедливым, но лишенным содержания, так как в этом случае потенциал V во всех точках пространства равен нулю, значит, всюду будет $\frac{\partial V}{\partial t}=0$, причем t означает любую прямую; отсюда, по § 18, легко заключить, что плотность по всей поверхности должна быть равна нулю, т. е. поверхность не может содержать никаких масс.

Это замечание имеет, вообще, место всегда, когда массы содержатся лишь на самой поверхности, даже если она и замкнутая, так как очевидно, по теореме § 25, что значение потенциала в этом случае и во всем внутреннем объеме будет равно нулю.

§ 29

Прежде чем переходить к следующим исследованиям, в которых играют главную роль массы, распределенные непрерывно по поверхности, необходимо обратить внимание на существенное различие в их распределении: именно, на случай, когда имеются массы только одного знака (которые мы для краткости будем считать всегда положительными), и на случай, когда имеются массы различных знаков. Если масса M так распределена по поверхности, что на каждом элементе ds поверхности лежит масса $m ds$, где, следовательно, по нашей до сих пор принятой терминологии, m есть плотность, и $\int m ds$, взятый по всей поверхности, равен M , то такое распределение мы будем называть „распределением одного знака“, если m везде положительно или, по крайней мере, нигде не отрицательно; если же в некоторых местах m положительно, в других отрицательно, то такое распределение будем называть „распределением разных знаков“; при этом M есть алгебраическая сумма масс отдельных частиц или абсолютная величина разности положительных и отрицательных масс. Специальный случай распределения масс разных знаков — это тот, когда $M=0$, и здесь может казаться странным употребление выражения, что масса, равная нулю, распределена по поверхности.

§ 30

Само собою ясно, что как бы масса M одного знака ни была распределена по поверхности, положительный потенциал, происходящий от этого, будет во всех точках поверхности

больше, нежели $\frac{M}{r}$, где r есть наибольшее расстояние двух точек поверхности; потенциал мог бы достигнуть этого значения в одном конце линии r , если бы вся масса была сосредоточена в другом, но этот случай здесь не может иметь место, так как мы имеем дело лишь с непрерывным распределением, когда на каждом элементе поверхности ds находится бесконечно малая масса mds . Интеграл $\int V mds$, взятый по всей поверхности, будет, во всяком случае, больше $\int \frac{M}{r} mds$, т. е. $\frac{M^2}{r}$, следовательно, есть такое распределение масс одного знака, при котором этот интеграл имеет минимум.

Одной из задач следующего исследования является доказательство, что при таком распределении, когда $\int V mds$ получает свое наименьшее значение, потенциал V в каждой точке поверхности имеет одно и то же значение, что при этом ни одна из частей поверхности не остается непокрытой и что есть лишь одно такое распределение [13]. Для краткости мы проведем наше исследование с самого начала в более общем виде.

§ 31

Пусть U есть такая величина, которая в каждой точке поверхности имеет определенное конечное значение, изменяющееся непрерывно. Тогда интеграл

$$\Omega = \int (V - 2U) mds,$$

взятый по всей поверхности, может иметь весьма различные значения вследствие разнообразия распределения массы M , хотя эти массы и будут иметь один знак. Очевидно, что для одного распределения такого рода должно существовать наименьшее значение этого интеграла. Дадим теперь доказательство следующей теоремы.

Т е о р е м а. При распределении масс одного знака, во-первых, разность $V - U = W$ повсюду на поверхности, где она действительно покрыта частями M , имеет постоянное значение; во-вторых, если некоторые части поверхности останутся непокрытыми, то W в них будет больше или, по крайней мере, не меньше указанного постоянного значения.

I. Прежде всего необходимо доказать, что если вместо одного распределения взять другое, бесконечно мало от него отличающееся, причем m заменить через $m + \mu$, то происходящая от этого вариация Ω выразится через

$$2 \int W \mu ds.$$

В самом деле, если обозначить вариации Ω и V через $\delta\Omega$ и δV , то

$$\delta\Omega = \int \delta V m ds + \int (V - 2U) \mu ds,$$

но одновременно

$$\int \delta V m ds = \int V \mu ds,$$

как это легко видеть из теоремы § 19, так как δV есть не что иное, как потенциал такого распределения масс, при котором μ есть плотность каждого элемента поверхности, и, следовательно, то, что здесь обозначено V , m , δV , μ , там было V , K , v и k , и ds можно взять одновременно за dS или ds . Следовательно,

$$\delta\Omega = \int (2V - 2U) \mu ds = 2 \int W \mu ds.$$

II. Очевидно, что вариации μ вообще подлежат тому ограничению, что $\int \mu ds = 0$, и, сверх того, при теперешнем исследовании еще второму, — что μ для непокрытых частей поверхности, если таковые имеются, не должно быть отрицательным, ибо тогда распределение перестало бы быть „распределением одного знака“.

III. Примем поэтому, что при некотором определенном распределении масс M имеют место неравные значения W в различных частях поверхности. Пусть A есть величина, заключающаяся между неравными частями W ; P — часть поверхности, на которой значения W больше, Q — та часть, где они меньше A ; пусть, далее, p и q — равновеликие части поверхности, относящиеся к P и Q ; при этих предположениях припишем вариации m везде на p постоянно отрицательное значение $\mu = -v$, на q — везде положительное $\mu = v$, и во всех прочих частях поверхности значение нуль. Очевидно, что при этом первое условие п. II будет выполнено, второе же условие требует еще, чтобы на p не было непокрытых частей, что всегда возможно, если только весь кусок P не покрыт. Результатом этого будет то, что $\delta\Omega$ получит отрицательное значение, что легко видеть, написав эту вариацию в виде

$$\delta\Omega = 2 \int (W - A) \mu ds.$$

Отсюда ясно, что если при данном распределении в покрытых частях поверхности встречаются неравные значения W или если при равенстве значений на покрытых частях меньшие значения встречаются на непокрытых, то измененным распределением вариация Ω может быть уменьшена и, следовательно, при минимальном значении Ω указанные в теореме условия должны быть выполнены.

§ 32

Если теперь для нашего специального случая (§ 30), когда $U=0$ и, значит, когда W есть просто потенциал распределенных по поверхности масс и Ω есть интеграл $\int V m ds$, мы соединим предыдущую теорему с теоремою § 28, то само собою последует, что при минимальном значении $\int V m ds$ поверхность не должна иметь непокрытых частей, так как

в противном случае, если даже вся поверхность замкнутая, покрытая часть поверхности могла бы быть рассматриваема как незамкнутая, и, следовательно, непокрытая часть — как принадлежащая внешнему пространству; следовательно, таким образом, на ней, согласно § 28, потенциал имел бы меньшее значение, чем на покрытой части, тогда как теорема предыдущего параграфа исключает такое меньшее значение.

Таким образом, доказано, что существует распределение данной массы одного знака по всей поверхности, при котором не остается непокрытых частей и при котором для всех точек поверхности потенциал имеет одно и то же значение. То, чего теперь недостает для полноты доказательства теоремы § 30, — именно, указания, что такое распределение только одно, — будет приведено ниже как часть более общей теоремы.

Условие того, что при наименьшем значении $\int V m ds$ ни одна часть поверхности не должна оставаться непокрытой, может быть выражено также следующим образом: при всяком распределении, при котором конечный кусок поверхности остается непокрытым, интеграл $\int V m ds$ получает значение, превышающее минимальное на конечную величину.

§ 33

Сущность доказательства в § 31 основана на очевидности, с которой непосредственно постигается существование минимального значения Ω , если ограничиться распределением заданной массы одного знака. Если бы такая же очевидность имела место и без указанного ограничения, то полученные результаты привели бы к следующему заключению: *всякий раз, когда нет „распределения одного знака“, существует „распределение разных знаков“ заданной массы, при котором $W = V - U$ во всех точках поверхности имеет постоянное значение, и второе условие (п. II § 31) отпадает.*

Но такая очевидность пропадает, как только мы откинем ограничение, чтобы распределение было распределением одного знака, поэтому мы вынуждены искать строгое доказательство этой важнейшей теоремы всего нашего исследования несколько искусственным путем. Следующий способ, кажется, ведет к цели самым простым образом.

Мы рассмотрим сперва три различных распределения масс, для которых вместо неопределенного обозначения плотности m и потенциала V введем следующие отдельные обозначения:

$$\begin{aligned} \text{I. } m &= m^0, & V &= V^0, \\ \text{II. } m &= m', & V &= V', \\ \text{III. } m &= \mu, & V &= v. \end{aligned}$$

Распределение I есть такое распределение положительной массы M , при котором $\int V m ds$ есть минимум.

Распределение II есть такое распределение той же массы M одного знака, для которого интеграл $\int (V - 2\epsilon U) m ds$ есть минимум, причем ϵ есть произвольный постоянный коэффициент.

Распределение III зависит от I и II так, что $\mu = \frac{m' - m^0}{\epsilon}$ и является, таким образом, „распределением разных знаков“, в котором полная масса равна нулю.

Согласно доказанному в п. III § 31, V^0 постоянно по всей поверхности, $V' - \epsilon U$ — на поверхности, поскольку она покрыта, согласно второму распределению, значит в этом же куске поверхности и $v - U$ остается постоянным, так как $v = \frac{V' - V^0}{\epsilon}$.

Будет ли при втором распределении покрыта вся поверхность или останется непокрытым больший или меньший участок, — это зависит от коэффициента ϵ . Так как второе распределение переходит в первое, когда $\epsilon = 0$, то, вообще говоря, участок, оставшийся при определенном ϵ непокры-

тым, будет уменьшаться с убыванием ϵ и совершенно заполнится раньше, нежели ϵ достигнет значения 0. В особенных случаях может оказаться, что всегда останется непокрытый участок, пока ϵ отличается от нуля и не принимает обратного знака. Для нашей цели достаточно принять ϵ бесконечно малым, причем легко показать, что при этом не может остаться конечного непокрытого участка, так как, в противном случае, по замечанию в конце § 32, интеграл $\int V' m' ds$ должен бы быть на конечную величину больше, нежели $\int V^0 m^0 ds$; если эту разницу обозначить через e , то разность обоих интегралов

$$\int (V' - 2\epsilon U) m' ds - \int (V^0 - 2\epsilon U) m^0 ds = e - 2\epsilon \int U' (m' - m^0) ds,$$

которая при бесконечно малом ϵ сохраняет положительное значение, вопреки предположению, что $\int (V - 2\epsilon U) m ds$ при втором распределении имеет наименьшее значение.

Отсюда заключаем, что если при третьем распределении взять для μ предельное значение $\frac{m' - m^0}{\epsilon}$ при бесконечном убывании ϵ , то разность $v - U$ на всей поверхности будет иметь постоянное значение.

Составим теперь четвертое распределение, причем положим $m = m^0 + \mu$, так что полная масса остается равной M , тогда возникший потенциал будет равен $V^0 + v$; следовательно, по всей поверхности он будет превышать величину U на постоянную величину $V^0 + v - U$, чем указанная теорема и доказывается.

§ 34

Остается еще доказать, что есть лишь одно распределение заданной массы, при котором $V - U$ на всей поверхности постоянно. В самом деле, если бы было два различных распределения и если m и V в первом обозначить через m' и V' и во втором через m'' и V'' , то потенциал третьего

распределения, в котором будет принято $m = m' - m''$, будет $V' - V''$ и, следовательно, будет постоянным, и совокупная масса равна нулю. По § 27 этот постоянный потенциал должен быть равен нулю, и, следовательно, по § 28, $m' - m'' = 0$, т. е. оба распределения тождественны.

Наконец, необходимо еще упомянуть, что есть такое распределение масс, при котором разность $V - U$ имеет *заданное* постоянное значение. Пусть α обозначает произвольный постоянный коэффициент; тогда, сохраняя обозначения предыдущего параграфа для первого и третьего распределений, получим, что потенциал такого распределения, при котором $m = \alpha m^0 + \mu$, будет равен $\alpha V^0 + v$, и постоянной разнице $\alpha V^0 + v - U$ может быть придано любое значение подобающим выбором коэффициента α . Полная масса этого распределения уже не будет произвольна, а будет равна αM . При этом ясно, подобно тому, как выше, что это распределение может быть произведено единственным способом.

§ 35

Действительное определение распределения массы по заданной поверхности для любой заданной формы U превосходит в большей части случаев возможности анализа в его современном состоянии. Простейший случай, где оно подчинено нашей возможности, есть тот, когда поверхность есть полная поверхность шара; но мы будем сейчас рассматривать несколько более общий случай, когда поверхность отличается от шаровой весьма мало и можно пренебречь величинами высшего порядка малости, чем само отклонение.

Пусть R есть радиус шара, r — расстояние любой точки пространства от его центра, u — угол между r и постоянной прямой, λ — угол между плоскостью, проведенной через эту прямую и через r и постоянной плоскостью. Расстояние некоторой точки данной замкнутой поверхности от центра шара равно $R(1 + \gamma z)$, где γ есть постоянный весьма малый

множитель, высшими степенями которого можно пренебречь; z , так же как U , функция u и λ .

Потенциал V массы, распределенной по поверхности шара, в каждой точке внешнего пространства разлагается в ряд по убывающим степеням r вида

$$A^0 \frac{R}{r} + A' \left(\frac{R}{r} \right)^2 + A'' \left(\frac{R}{r} \right)^3 + \dots,$$

и в каждой точке внутри шара в ряд по возрастающим степеням r , т. е.

$$B^0 + B' \frac{r}{R} + B'' \left(\frac{r}{R} \right)^2 + B''' \left(\frac{r}{R} \right)^3 + \dots$$

Коэффициенты A^0 , A' , A'' и пр. являются функциями от u и λ , удовлетворяющими известному дифференциальному уравнению („Общая теория земного магнетизма“, § 18), также и B^0 , B' , B'' и т. д. На заданной поверхности потенциал должен быть равен заданной функции от u и λ , именно $V=U$, следовательно

$$\left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{1}{2}} V = (1 + \gamma z)^{\frac{1}{2}} U.$$

Допустим, что $(1 + \gamma z)^{\frac{1}{2}} U$ разлагается в ряд $P^0 + P' + P'' + P''' + \dots$ и что отдельные члены P^0 , P' , P'' , P''' и т. д. также удовлетворяют указанному дифференциальному уравнению, и вспомним, что оба вышеприведенных ряда для потенциала справедливы до самой поверхности; тогда

$$\begin{aligned} P^0 + P' + P'' + P''' + \dots &= A^0 (1 + \gamma z)^{-\frac{1}{2}} + A' (1 + \gamma z)^{-\frac{3}{2}} + \\ &+ A'' (1 + \gamma z)^{-\frac{5}{2}} + \dots = B^0 (1 + \gamma z)^{\frac{1}{2}} + \\ &+ B' (1 + \gamma z)^{\frac{3}{2}} + B'' (1 + \gamma z)^{\frac{5}{2}} + \dots \end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что если пренебречь величинами порядка γ , то

$$P^0 + P' + P'' + P''' + \dots = A^0 + A' + A'' + A''' + \dots$$

и что (ибо функция от u и λ может быть разложена в ряд по функциям, удовлетворяющим указанному дифференциальному уравнению, единственным образом)

$$P^0 = A^0, \quad P' = A', \quad P'' = A'' \text{ и т. д.}$$

Таким же образом, пренебрегая величинами порядка γ , получим

$$P^0 = B^0, \quad P' = B', \quad P'' = B'' \text{ и т. д.}$$

Поэтому, если положить:

$$(I) \begin{cases} A^0 = P^0 + \gamma a^0, & B^0 = P^0 - \gamma b^0, \\ A' = P' + \gamma a', & B' = P' - \gamma b', \\ A'' = P'' + \gamma a'', & B'' = P'' - \gamma b'', \\ A''' = P''' + \gamma a''', & B''' = P''' - \gamma b''', \end{cases}$$

где a^0, a', a'', a''' и т. д., и b^0, b', b'', b''' и т. д. также удовлетворяют указанному дифференциальному уравнению, и подставить эти величины в дифференциальное уравнение, причем величины порядка γ^2 отбросить, то, по разделении на γ с точностью до γ , получим

$$a^0 + a' + a'' + a''' + \dots = \frac{1}{2} z (P^0 + 3P' + 5P'' + 7P''' + \dots),$$

$$b^0 + b' + b'' + b''' + \dots = \frac{1}{2} z (P^0 + 3P' + 5P'' + 7P''' + \dots).$$

Следовательно, с точностью до величин порядка γ ,

$$b^0 = a^0, \quad b' = a', \quad b'' = a'' \text{ и т. д.}$$

и, значит, с точностью до γ^2 , будет

$$(II) \quad B^0 = P^0 - \gamma a^0, \quad B' = P' - \gamma a', \quad B'' = P'' - \gamma a'', \text{ и т. д.}$$

Производная $\frac{\partial V}{\partial r}$ имеет на самой поверхности два различных значения, и то из них, которое относится к отрицательному dr , т. е. ко внутренней стороне, превосходит то, которое относится к наружной стороне, на $4\pi t \cos \theta$, где t есть плотность в точке пересечения, и θ есть угол между r и нормалью (§ 13, причем t, A, k^0 означают то же, что здесь r, θ, m). Оба эти значения получаются, если оба выражения для V^0 , относящиеся к внутреннему и внешнему

пространству, продифференцировать по r и затем положить $r = R(1 + \gamma z)$. Таким образом получим:

$$1\text{-е выражение} = \frac{1}{R} \{B' + 2B''(1 + \gamma z) + 3B'''(1 + \gamma z)^2 + \dots\},$$

$$2\text{-е выражение} = -\frac{1}{R} \{A^0(1 + \gamma z)^{-2} + 2A'(1 + \gamma z)^{-3} + \\ + 3A''(1 + \gamma z)^{-4} + \dots\}.$$

Таким образом, мы получим, если умножим разность на $R(1 + \gamma z)^{\frac{3}{2}}$:

$$4\pi m R \cos \theta (1 + \gamma z)^{\frac{3}{2}} = A^0(1 + \gamma z)^{-\frac{1}{2}} + 2A'(1 + \gamma z)^{-\frac{3}{2}} + \\ + 3A''(1 + \gamma z)^{-\frac{5}{2}} + \dots + B'(1 + \gamma z)^{\frac{3}{2}} + 2B''(1 + \gamma z)^{\frac{5}{2}} + \\ + 3B'''(1 + \gamma z)^{\frac{7}{2}} + \dots$$

Сюда надо подставить вместо A^0, A' и т. д. значения (I) и вместо B^0, B' и т. д. — значения (II) и отбросить члены порядка γ^2 ; тогда получим:

$$4\pi m R \cos \theta (1 + \gamma z)^{\frac{3}{2}} = P^0 + 3P' + 5P'' + 7P''' + \dots \\ \dots + \gamma(a^0 + a' + a'' + a''' + \dots) - \\ - \frac{1}{2}\gamma z(P^0 + 3P' + 5P'' + 7P''' + \dots);$$

так как два последние ряда взаимно уничтожаются до членов порядка γ^2 , то

$$m = \frac{(1 + \gamma z)^{-\frac{3}{2}}}{4\pi R \cos \theta} [P^0 + 3P' + 5P'' + 7P''' + \dots],$$

чем задача и решается. Вместо $(1 + \gamma z)^{-\frac{3}{2}}$ можно писать $1 - \frac{3}{2}\gamma z$, и делитель $\cos \theta$ отбросить, так как, вообще говоря, $\cos \theta$ будет порядка γ , т. е. отличается от 1 на член порядка γ^2 .

Для случая шара, когда $\gamma = 0$, имеем вполне точно

$$m = \frac{1}{4\pi R} (P^0 + 3P' + 5P'' + 7P''' + \dots),$$

причем $P^0 + P' + P'' + P''' + \dots$ представляет разложение самого U .

§ 36

Величина U в предыдущих рассуждениях оставлена неопределенной; применение этих исследований к случаю, когда за U принят потенциал заданной системы масс, даст нам следующую важную теорему.

Теорема. Любое распределение масс D , которое отнесено или только к внутреннему пространству, ограниченному замкнутой поверхностью S , или только к внешнему пространству, можно заменить таким распределением масс E по самой поверхности, что действие E будет равно действию D во всех точках внешнего пространства для первого случая, или во всех точках внутреннего объема для второго случая.

Для этого требуется только, — если обозначить потенциал распределения D во всякой точке поверхности S через U , потенциал же распределения E — через V , — чтобы для всей поверхности было $V - U = 0$ для первого случая, а для второго только было бы постоянно. Пусть $-U$ есть потенциал распределения D' , противоположного D (так что вместо каждой частицы берется противоположная), так что $V - U$ есть потенциал совместного распределения D' и E ; действия такого совместного распределения взаимно уничтожаются — в первом случае во всем внешнем пространстве, во втором случае во всем внутреннем объеме (§§ 27 и 25), т. е. действия распределений D и E будут равны в соответствующих пространствах. Кроме того, полная масса в E для первого случая будет равна массе в D , во втором же останется произвольной.

Теорема, которая была высказана в „*Intensitas vis magneticae*“, п. 2, а также в „Общей теории земного магнетизма“ в различных местах, представляет частный случай только, что доказанной.

§ 37

Хотя, как уже замечено в § 35, полное и действительное нахождение распределения E в большей части случаев представляет непреодолимые затруднения, есть все-таки один случай, в котором это нахождение совершается с большою легкостью, и который поэтому заслуживает быть здесь приведенным. Это тот случай, когда U постоянно, значит S есть поверхность равновесия для заданной системы масс D [14]. Легко видеть, что здесь может быть речь только о случае, когда D находится во внутреннем объеме и когда полная масса не равна нулю, так как в противном случае не было бы никакого действия, которое надо бы было воспроизводить распределением масс по поверхности S .

Пусть O есть точка поверхности S и r — прямая линия, пересекающая поверхность в этой точке под прямым углом; r рассматривается как возрастающее в направлении изнутри наружу; пусть, кроме того, — C есть значение производной $\frac{\partial U}{\partial r}$ в O , и m есть плотность, которая имеет место в O при распределении масс E . Производная $\frac{\partial V}{\partial r}$ имеет в O два различных значения: то, которое относится к наружной стороне, будет равно производной $\frac{\partial U}{\partial r}$ и, следовательно, равно $-C$, так как на поверхности и во всем внешнем пространстве $V=U$; то же, которое относится к внутренней стороне, равно нулю, так как V на поверхности и во всем внутреннем объеме постоянно. Так как второе значение на $4\pi m$ больше первого, то мы имеем $4\pi m = C$, т. е. $m = \frac{C}{4\pi}$. Очевидно, что C есть не что иное, как сила, происходящая от распределения масс D и имеющая одинаковый знак с полною массою.

П Р И Л О Ж Е Н И Я





ПОСЛЕСЛОВИЕ

Издание на русском языке важнейших трудов Карла Фридриха Гаусса по математическому естествознанию было задумано в 1940 г. акад. А. Н. Крыловым. Проект издания А. Н. Крылов сообщил созванному им совещанию из нескольких астрономов, механиков и математиков. Это совещание, сознавая всю важность начинания А. Н. Крылова, тогда же разработало план будущего издания, которое должно было включать комментированный перевод трудов Гаусса по земному магнетизму, теоретической астрономии и высшей геодезии. Издание должно было содержать достаточно подробную биографию Гаусса и анализ его творчества по перечисленным разделам.

Летом 1940 г. на торжественном заседании Академии Наук СССР, посвященном столетию Пулковской обсерватории, А. Н. Крылов сообщил о решении совещания издать труды Гаусса. Это решение было встречено с полным одобрением и вниманием.

Находясь в эвакуации, А. Н. Крылов, с присущей ему исключительной энергией осуществления научных планов, сам выполнил перевод как основных работ Гаусса по земному магнетизму, так и некоторых его произведений меньшего объема, относящихся к той же теме. Этот перевод А. Н. Крылова использован для настоящего издания.

Внимание, которое А. Н. Крылов в последние годы своей жизни уделял творчеству Гаусса, имеет корни во всей дея-

тельности А. Н. Крылова и в основной направленности его научных интересов. Как хорошо известно, научные работы А. Н. Крылова начались и, можно сказать, нашли свое завершение в трудах по компасному делу. Мы позволим себе здесь остановиться на важнейших моментах этой стороны творчества А. Н. Крылова, потому что само появление трудов Гаусса в русском переводе является осуществлением замысла нашего знаменитого кораблестроителя, инженера, математика и геофизика.

Как сообщает акад. А. Н. Крылов в своих воспоминаниях, еще в годы юности, когда он был мичманом флота, ему пришлось под руководством де Коллонга заняться лабораторным исследованием дефлектора и познакомиться в связи с этим с работой Гаусса „Интенсивность земной магнитной силы, приведенная к абсолютной мере“ („*Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata*“): „Я увидел, что сущность всего, что мне предстояло делать, изложена у Гаусса, и работа, заданная Коллонгом, пошла сама собой“.¹ Работа А. Н. Крылова „Вычисление делений сил дефлектора компаса“, написанная в 1884 г., явилась его первой печатной работой; затем в 1885 г. последовала работа „О расположении стрелок в картушке компаса“, в которой теоретически исследовалось наивыгоднейшее расположение стрелок картушки, находящихся под действием магнитного поля Земли и собственного магнетизма корабля. Для этой работы А. Н. Крылов, по указанию де Коллонга, изучил статью Гаусса „Общие теоремы относительно сил притяжения и отталкивания, действующих обратно пропорционально квадрату расстояния“.

Занявшись далее теорией девиации компаса, в 1886 г. А. Н. Крылов построил дромоскоп — прибор, автоматически воспроизводящий изменение девиации компаса в зависимости от изменения курса корабля.

Решение задачи определения коэффициентов девиации по девиациям и силам, измеренным на трех курсах корабля,

¹ Акад. А. Н. Крылов. Мои воспоминания. Изд. АН СССР, 1945, стр. 72.

дано акад. А. Н. Крыловым в статье „Основания теории девиации компасов“, изданной Академией Наук СССР в 1940 г.

Вопрос о полном уничтожении девиации компаса рассматривался акад. А. Н. Крыловым не только в кораблевождении, но и в самолетовождении — в заметке „Об использовании Курской магнитной аномалии“.

По просьбе Главного гидрографического управления А. Н. Крылов в 1919 г. написал руководство по земному магнетизму для гидрографов и штурманов, опубликованное в 1922 г. под названием „О земном магнетизме“.¹ В этом курсе А. Н. Крылов изложил способ Гаусса абсолютного определения горизонтальной составляющей земного магнетизма и математическую теорию земного магнетизма Гаусса, а также дал описание приборов для определения элементов земного магнетизма и детально рассмотрел методику геомагнитных измерений и способ обработки наблюдений.

А. Н. Крылов интересовался также и астрономическими работами Гаусса. Так, в 1909 г., ввиду приближения кометы Галлея, он изучил способ определения параболической орбиты по трем наблюдениям, пользуясь методом Ньютона, Лапласа, Ольберса и Гаусса. Будучи директором физической обсерватории, в 1916 г. А. Н. Крылов обнаружил в библиотеке обсерватории запись лекций Гаусса по теоретической астрономии (на немецком языке), принадлежащую А. Я. Купферу; Алексей Николаевич перевел эти лекции на русский язык и издал их в 1921 г.

В настоящий сборник трудов Гаусса, задуманный, как уже было сказано выше, по инициативе акад. А. Н. Крылова, вошли только две основные, ставшие классическими, работы Гаусса по земному магнетизму и одна работа по теории потенциала — это „Интенсивность земной магнитной силы,

¹ А. Н. Крылов. О земном магнетизме. Пгр., 1922. Эта работа, так же как и работы по компасному делу, переиздана в Полном собрании трудов А. Н. Крылова, т. II, ч. 1 („Компасное дело“), 1943 и т. II, ч. 2 („Земной магнетизм и компасное дело“), 1947.

приведенная к абсолютной мере" (доклад об этой работе был сделан Гауссом на заседании Геттингенского королевского ученого общества 15 декабря 1832 г.), затем „Общая теория земного магнетизма“, опубликованная в 1839 г. в Геттингене в „Результатах наблюдений Магнитного союза за 1838 г.“, и „Общие теоремы относительно сил притяжения и отталкивания, действующих обратно пропорционально квадрату расстояния“, — работа, напечатанная также в „Результатах“ в 1840 г.

В первой из указанных работ Гаусс изложил основания для создания абсолютной системы единиц физических величин и дал метод абсолютного определения горизонтальной составляющей магнитного поля Земли. До Гаусса магнитное поле Земли не имело полной характеристики; чаще всего наблюдалось склонение и наклонение магнитной стрелки, а для измерения горизонтальной напряженности применялся весьма несовершенный метод, состоявший в определении периода колебаний магнита, подвешенного на нити; сравнением периодов колебаний одного и того же магнита в различных пунктах земной поверхности пытались относительным образом определять горизонтальную составляющую напряженности поля. Однако изменение периода колебаний, наблюдавшееся при переходе от одного пункта к другому, могло быть вызвано не только изменением магнитного поля, но и изменением магнитного состояния магнита. Гаусс предложил абсолютную систему магнитных единиц, которая позволила выразить в абсолютной мере магнитный момент и напряженность поля через единицы длины, времени, массы (или через единицы длины, времени и „ускоряющей“ силы), и показал, каким образом можно определить из магнитных наблюдений отдельно напряженность поля и отдельно магнитный момент магнита.

До появления „Общей теории земного магнетизма“ Гаусса не существовало полной математической теории земного магнетизма. В конце XVIII в. Тобиас Майер, Эйлер, а в на-

чале XIX в. современники Гаусса Симонов, Крафт, Био, Ханстин, Дюперре пытались объяснить происхождение магнитного поля Земли действием одного или нескольких магнитов, тем или иным образом расположенных внутри Земли, или равномерным намагничиванием Земли (Симонов). Однако сравнение вычисленных и наблюденных значений элементов земного магнетизма всегда давало не вполне удовлетворительные результаты, — до тех пор, пока Гаусс не показал в „Общей теории земного магнетизма“, что нужно идти другим путем и, вместо того чтобы заранее задаваться той или иной гипотезой о строении и расположении магнитов, следует исходить из наблюдаемого магнитного поля на поверхности земли.

Гаусс установил, что знания магнитного потенциала достаточно для вычисления трех элементов поля в данной точке, и вывел выражение магнитного потенциала в любой точке земной поверхности в виде ряда по шаровым функциям; Гаусс нашел 24 коэффициента этого разложения эмпирически, исходя из наблюденных значений элементов поля.

Теоремы, которыми пришлось пользоваться Гауссу для создания общей теории земного магнетизма, собраны вместе, и доказательства их тщательно рассмотрены в работе „Общие теоремы относительно сил притяжения и отталкивания, действующих обратно пропорционально квадрату расстояния“; эта работа Гаусса явилась одним из первых систематических изложений теории потенциала.

Кроме вышеуказанных трех работ Гаусса, в настоящий сборник вошли также и обзоры первой и третьей работ, носящие те же заглавия — „Интенсивность земной магнитной силы, приведенная к абсолютной мере“ и „Общие теоремы относительно сил притяжения и отталкивания, действующих обратно пропорционально квадрату расстояния“. Эти обзоры, составленные Гауссом, представляют собой краткое изложение существа дела без каких-либо математических выкладок; такая форма изложения была необходима Гауссу для его

докладов о своих трудах в Геттингенском ученом обществе.

Упомянутые обзоры включены в сборник, как разъясняющие и подчеркивающие физический смысл фундаментальных работ Гаусса.

В сборник включена также работа профессора Казанского университета И. М. Симонова. Эта работа была напечатана на французском языке в 1837 г. под названием „Sur le magnétisme terrestre“ в XVI т. журнала Крелля; мы поместили в приложении ее перевод на русском языке.

В указанной статье Симонов делает допущение, что магнитные частицы рассеяны равномерно внутри сферы радиуса r' и что магнитные оси этих частиц параллельны между собой; бесконечно малое расстояние между полюсами магнитного элемента Симонов обозначает через p .

Взяв начало координат в центре земного шара и направив ось z по оси вращения Земли к северному полюсу, при условии, что плоскость xoz проходит через пункт наблюдений, Симонов приходит к следующим выражениям для составляющих A , B , C напряженности геомагнитного поля по осям x , y , z :

$$A = -\mu p r'^2 \frac{\partial v}{\partial x}, \quad B = 0, \quad C = -\mu p r'^2 \frac{\partial v}{\partial z},$$

где

$$v = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta \sin \theta d\theta d\psi}{(r^2 + r'^2 - 2r'z \cos \theta - 2r'x \sin \theta \cos \psi)^{\frac{1}{2}}}.$$

Здесь θ , ψ и r' — сферические координаты центра элементарного объема; r — радиус Земли.

Симонов не объясняет, что представляет собою величина μ . Однако из формул, выводимых им, нетрудно понять, что μ — это магнитная масса каждого полюса, „связка“ магнитных элементов, объем которой принимается равным единице, и, таким образом, произведение μp является не чем иным,

как магнитным моментом единицы объема, т. е. интенсивностью намагничения I .

Вынося радиус Земли r из-под корня в выражении v и развертывая знаменатель этого выражения в ряд по степеням $k = \left(\frac{r'}{r}\right)^2$, Симонов находит после интегрирования этого ряда, что

$$v = \frac{4}{3} \frac{\pi r' z}{r^3},$$

и, следовательно,

$$A = \frac{4\pi\mu pr'^3 zx}{r^5}$$

и

$$C = \frac{4\pi\mu pr'^3 z^2}{r^5} - \frac{4\pi\mu pr'^3}{3r^3}.$$

Из выражений для A и C видно, что отношение $\frac{A}{C}$ не зависит от радиуса r' магнитной сферы. Если магнитная сфера концентрична с земным шаром, то из отношения $\frac{A}{C}$ можно вывести формулу

$$\operatorname{tg} i = 2 \operatorname{tg} \varphi,$$

где i — угол наклона, а φ — магнитная широта. Последняя формула ранее была найдена Био в предположении, что в центре Земли находится магнитный диполь, и Симонов заключает отсюда, что действие диполя на поверхности земли тождественно с результатом действия множества магнитных частичек, рассеянных в Земле с постоянной плотностью.

В современных обозначениях результат математического исследования И. М. Симонова может быть изложен следующим образом. Произведение $\mu pr'^2$ представляет собой магнитный потенциал U однородно намагниченной сферы.

Действительно,

$$U = \mu pr'^2 = \frac{4\pi\mu pr'^3 z}{3r^3} = \frac{IV \cos \theta}{r^2} = \frac{M \cos \theta}{r^2}.$$

Здесь V — объем магнитной сферы, $IV = M$ — магнитный момент сферы.

Составляющие A и C могут быть представлены как частные производные потенциала по соответствующим координатам, взятые с отрицательным знаком:

$$A = - \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{3Mzx}{r^5}$$

и

$$C = - \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{3Mz^2}{r^5} - \frac{M}{r^3}.$$

В своей работе Симонов не дает никакого названия функции χ , хотя, по существу, как показано, он пользуется выражением для магнитного потенциала Земли.

Таким образом впервые в науке о земном магнетизме проф. И. М. Симоновым было выведено выражение магнитного потенциала однородно намагниченного земного шара (а также и для производных потенциала), т. е. был определен первый член разложения магнитного потенциала Земли в ряд по шаровым функциям, найденного впоследствии Гауссом. Теория И. М. Симонова является наиболее удовлетворительной из всех теорий земного магнетизма, созданных до Гаусса.

Т. Н. Розе.



И. М. Симонов

О ЗЕМНОМ МАГНЕТИЗМЕ

Явления, которые показывает намагниченная стрелка, последовательно переносимая в различные места земного шара, стали предметом основного занятия многих физиков. Уже выполнено большое число важных наблюдений над направлением и интенсивностью магнитных сил Земли и определены с достаточной точностью три элемента наблюдений почти для всех примечательных точек населенной поверхности земли. Этими тремя элементами являются: склонение намагниченной стрелки, ее наклонение и интенсивность. Можно сказать с уверенностью, что практическая часть этой ветви физики является полной. Инструменты, усовершенствованные в последнее время, дают нам два первых элемента с точностью одной минуты, а по методам Борда и Пуассона с большой точностью определены отношения интенсивностей магнитной силы Земли в различных местах. С этими практическими средствами Гумбольдт и Гэ-Люссак, Перри и Сэбайн, Ханстин и Эрман, Дюпере и Блоссевиль произвели большое число ценных наблюдений, которые отныне могут служить исходными данными для всех будущих исследований о законах магнитного действия нашего шара. Навигаторы определили странную конфигурацию линии, где магнитное наклонение равно нулю; они нашли, что эта линия, которую обычно называют магнитным экватором, имеет множество изгибов в той части шара, где она проходит через Атлантический

океан, на западном побережье Америки и у Каролинских островов.

Что касается теории этой части физики, то она еще очень далека от совершенства. Известна только единственная формула, которая дает закон магнитногоклонения I стрелки в областях, мало удаленных от экватора, когда известна магнитная широта λ . Эта формула открыта Боудичем:

$$\operatorname{tg} I = 2 \operatorname{tg} \lambda.$$

Био дал в своем „Руководстве по физике“ другую формулу, которая выражается следующим образом:

$$\operatorname{tg}(I + \lambda) = \frac{\sin 2\lambda}{\cos 2\lambda - \frac{1}{3}},$$

но легко видеть, что формула Био совершенно идентична формуле Боудича.

Теория Био основана на гипотезе, что в центре Земли имеется весьма малый магнит, или, иначе говоря, два бесконечно близких магнитных центра (один северный и другой южный), которые оказывают действие на все точки поверхности земного шара по обычным законам магнитных сил, т. е. обратно пропорционально квадрату расстояния. Разность наклонений, вычисленных по предыдущим формулам, с наклонениями, наблюдаемыми в Европе, достигает в нескольких случаях 6° , но для восточной Азии эти формулы дают результаты, совершенно отличные от наблюдений. Это является очевидным доказательством неудовлетворительности гипотезы о двух центрах действия.

Био уже отметил это обстоятельство и признал, что один магнит, помещенный в центр Земли, не может удовлетворять явлениям. Не соглашаясь, однако, отбросить эту простую идею, он пытался не слишком отдаляться от нее, и так как он нашел, что она представляет довольно хорошо наблюдения, произведенные в Европе (с точностью до 5°) и в Атлантическом океане, то он попробовал произвести такое преобразование, которое было бы мало ощутимо в этой части

земного шара и которое стало бы более заметным в части, расположенной там, где магнитный экватор испытывает внезапный перегиб. К этому приходят, согласно Био, помещая около этой точки второй эксцентрический магнит, положение и относительную энергию которого можно определить, удовлетворяя наблюдениям. Однако, говорит он, производя эти вычисления, мы находим, что достаточно придать этому магниту весьма малую силу, для того чтобы исчезли аномалии, имеющие место в этой стороне земного шара, и чтобы согласовались малые наклонения, наблюденные в южной части океана с большими наклонениями, которые имеют место на севере Америки. Распределяя таким образом некоторые другие вторичные центры в пунктах земного шара, где неправильности склонения кажутся наиболее странными, вероятно, говорит Био, можно кончить точным представлением их, так же как наклонений и напряженностей. Аналогично и в солнечной системе главное движение, производимое действием солнца, искажается возмущениями, которые производят малые массы планет.

С другой стороны, Био ставит вопрос: действительно ли магнитное центральное действие производится магнитным ядром, заключенным внутри земного шара, и не является ли оно основным результатом действия всех магнитных частичек, рассеянных в веществе? В этом случае вторичные центры будут определены некоторыми местными притяжениями, ставшими превалирующими. Эта идея кажется более соответствующей природе, силы которой действуют почти везде совершенно аналогичным образом.

Для решения вопроса, предложенного Био, я предполагаю, для большей общности, что внутри Земли находится магнит сферической формы радиуса r' . Этот магнит может быть рассматриваем как собрание бесконечного множества стрелок или намагниченных бесконечно малых стержней, разделенных незначительными промежутками, непроницаемыми для магнетизма. Для краткости я называю магнитным элементом каждый из этих элементарных стержней, в которых

должны быть разделены две жидкости — северная и южная, и я предполагаю, что магнитные оси этих элементов приняли направления, параллельные между собой.

Отнесем теперь все точки земной сферы и сферического магнита, находящегося внутри Земли, к трем взаимно перпендикулярным координатным плоскостям, причем плоскость x и y перпендикулярна направлению элементарных магнитных стержней.

Предположим, наконец, что начало координат находится в центре сферического магнита и что x', y', z' являются координатами южного полюса какого-либо магнитного элемента и $x', y', z' + p$ являются координатами северного полюса, где p представляет собой расстояние между полюсами; эта величина является бесконечно малой и постоянной, так что мы можем положить $p = dz'$.

В этом случае малый параллелепипед $dx' dy' dz'$, представляющий собой элемент сферического магнита, может быть в то же время рассматриваем как малая связка элементарных стрелок, оба полюса которой отталкиваются полюсом одного знака и притягиваются полюсом противоположного знака магнитной стрелки, свободно подвешенной в каком-либо месте, положение которого на поверхности земли определяется координатами x, y, z .

Кулон и другие физики доказали экспериментально, что взаимодействие полюсов двух стрелок убывает, как квадрат расстояния, и что притягивающая и отталкивающая сила двух жидкостей — северной и южной — строго равны.

Следовательно, сумма двух действий, производимых двумя полюсами элементарной связки $dx' dy' dz'$ на каждый из полюсов стрелки буссоли, может быть выражена следующим образом:

$$\frac{\mu dx' dy' dz'}{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} - \frac{\mu dx' dy' dz'}{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z' - p)^2},$$

и три составляющих этих действий, направленных к началу координат параллельно осям x, y, z , будут

$$\frac{\mu(x-x') dx' dy' dz'}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{\mu(x-x') dx' dy' dz'}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z'-p)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\mu(y-y') dx' dy' dz'}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{\mu(y-y') dx' dy' dz'}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z'-p)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\mu(z-z') dx' dy' dz'}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{\mu(z-z'-p) dx' dy' dz'}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z'-p)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

или, так как p , так же как и μ , есть величина бесконечно малая и постоянная, эти выражения будут

$$\mu p \frac{d}{dz'} \left[\frac{(x-x') dx' dy' dz'}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{\frac{3}{2}}} \right],$$

$$\mu p \frac{d}{dz'} \left[\frac{(y-y') dx' dy' dz'}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{\frac{3}{2}}} \right],$$

$$\mu p \frac{d}{dz'} \left[\frac{(z-z') dx' dy' dz'}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{\frac{3}{2}}} \right].$$

Если обозначить через A , B и C три составляющих по осям x , y , z полного магнитного действия, которое производит вся земная сфера на стрелку, помещенную на поверхности в пункте наблюдения x , y , z , и если обозначить

$$\rho^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2,$$

то получим

$$A = \mu p \iiint \frac{d\left(\frac{x-x'}{\rho^3}\right)}{dz'} dx' dy' dz',$$

$$B = \mu p \iiint \frac{d\left(\frac{y-y'}{\rho^3}\right)}{dz'} dx' dy' dz',$$

$$C = \mu p \iiint \frac{d\left(\frac{z-z'}{\rho^3}\right)}{dz'} dx' dy' dz'.$$

Все тройные интегралы должны быть распространены на весь объем намагниченной сферы. Выполняя это интегрирование по z' , от $z = -Z$ до $z' = +Z$, мы получим:

$$\begin{aligned} A &= \mu p \iint \frac{(x-x') dx' dy'}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-Z)^2]^{\frac{3}{2}}} - \\ &\quad - \mu p \iint \frac{(x-x') dx' dy'}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+Z)^2]^{\frac{3}{2}}}, \\ B &= \mu p \iint \frac{(y-y') dx' dy'}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-Z)^2]^{\frac{3}{2}}} - \\ &\quad - \mu p \iint \frac{(y-y') dx' dy'}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+Z)^2]^{\frac{3}{2}}}, \\ C &= \mu p \iint \frac{(z-Z) dx' dy'}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-Z)^2]^{\frac{3}{2}}} - \\ &\quad - \mu p \iint \frac{(z-Z) dx' dy'}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+Z)^2]^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Предыдущее интегрирование было выполнено по поверхности магнитной сферы; x' , y' , Z были координатами точки пересечения этой поверхности с координатою z . Их можно заменить полярными координатами r' , θ и ψ , где θ есть угол, образуемый радиусом r' , проведенным в точку x' , y' , Z , и осью z , и ψ есть угол между плоскостью этих двух прямых и плоскостью x и z .

Произведение $dx' dy'$ есть проекция на плоскости x и y элемента поверхности магнитной сферы; площадь этого элемента будет

$$r' \sin \theta d\theta d\psi,$$

его наклон к плоскости x и y есть θ ; следовательно,

$$dx' dy' = r^2 \cos \theta \sin \theta d\theta d\psi.$$

В то же время имеем:

$$Z = r' \cos \theta, \quad x' = r' \sin \theta \cos \psi, \quad y' = r' \sin \theta \sin \psi.$$

Каждый из двойных интегралов в выражениях для A, B, C простирается на все элементы полусферы внутреннего магнита радиуса r' ; следовательно, после введения полярных координат пределы интегрирования будут по θ от 0 до $\frac{\pi}{2}$ и по ψ — от 0 до 2π .

Но мы можем объединить интегралы двух выражений для A, B, C в один, у которого пределы будут $\theta = 0$ и π , $\psi = 0$ и 2π , и, обозначая $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, где r — радиус земного шара, мы получим:

$$A = \mu \cdot p r'^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{(x - r' \sin \theta \cos \psi) \cos \theta \sin \theta d\theta d\psi}{[r^2 + r'^2 - 2r' z \cos \theta - 2r' x \sin \theta \cos \psi - 2r' y \sin \theta \sin \psi]^{\frac{3}{2}}},$$

$$B = \mu \cdot p r'^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{(y - r' \sin \theta \sin \psi) \cos \theta \sin \theta d\theta d\psi}{[r^2 + r'^2 - 2r' z \cos \theta - 2r' x \sin \theta \cos \psi - 2r' y \sin \theta \sin \psi]^{\frac{3}{2}}},$$

$$C = \mu \cdot p r'^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{(z - r' \cos \theta) \cos \theta \sin \theta d\theta d\psi}{[r^2 + r'^2 - 2r' z \cos \theta - 2r' x \sin \theta \cos \psi - 2r' y \sin \theta \sin \psi]^{\frac{3}{2}}}.$$

Обозначим

$$v = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta \sin \theta d\theta d\psi}{[r^2 + r'^2 - 2r' z \cos \theta - 2r' x \sin \theta \cos \psi - 2r' y \sin \theta \sin \psi]^{\frac{1}{2}}}.$$

Получим

$$A = -\mu p r'^2 \left(\frac{dv}{dx} \right), \quad B = -\mu p r'^2 \left(\frac{dv}{dy} \right), \quad C = -\mu p r'^2 \left(\frac{dv}{dz} \right).$$

Теперь нам остается только проинтегрировать выражение v . Но это интегрирование выполнить значительно легче, если положить $y=0$, т. е. если предположить, что плоскость x и z проходит через место наблюдений.

$$\text{В этом случае } B=0 \text{ и } A = -\mu p r'^2 \frac{dv}{dx}, \quad C = -\mu p r'^2 \frac{dv}{dz},$$

где

$$v = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta \sin \theta d\theta d\psi}{[r^2 + r'^2 - 2r' z \cos \theta - 2r' x \sin \theta \cos \psi]^{\frac{1}{2}}};$$

или, если положить $\left(\frac{r'}{r}\right)^2 = k$, $2k^{\frac{1}{2}} \frac{z}{r} = a$, $2k^{\frac{1}{2}} \frac{x}{r} = b$, то

$$v = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta \sin \theta d\theta d\psi}{r [1 + k - a \cos \theta - b \sin \theta \cos \psi]^{\frac{1}{2}}},$$

и, развертывая последнее выражение для v в ряд, получим:

$$\begin{aligned} v = & \frac{1}{r} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta d\psi \left\{ 1 - \frac{1}{2}(k - a \cos \theta - b \sin \theta \cos \psi) + \right. \\ & + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} [k^2 - 2k(a \cos \theta + b \sin \theta \cos \psi) + (a \cos \theta + b \sin \theta \cos \psi)^2] - \\ & - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} [k^3 - 3k^2(a \cos \theta + b \sin \theta \cos \psi) + \\ & + 3k(a \cos \theta + b \sin \theta \cos \psi)^2 - (a \cos \theta + b \sin \theta \cos \psi)^3] + \dots \left. \right\}. \end{aligned}$$

Интегрирование этого ряда произведется легко, если мы сумеем проинтегрировать выражение

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} (a \cos \theta + b \sin \theta \cos \psi)^n \cos \theta \sin \theta d\theta d\psi.$$

Обозначая это выражение через Q и замечая, что

$$\int_0^{\pi} \cos^{2i+1} \theta \sin^m \theta d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} \cos^{2i+1} \psi d\psi = 0,$$

мы получим сначала

$$\begin{aligned} Q = & \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta d\psi \left\{ a^n \cos^n \theta + \right. \\ & + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2 \cos^{n-2} \theta \sin^2 \theta \cos^2 \psi + \\ & + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{n-4} b^4 \cos^{n-4} \theta \sin^4 \theta \cos^4 \psi + \dots \left. \right\}. \end{aligned}$$

$Q=0$, если n — четное число, и нам остается только найти Q , когда n — нечетное число.

Для этого нужно принять во внимание уравнения

$$\int_0^{\pi} \cos^{2i} \theta \sin^{2m+1} \theta d\theta = \frac{2m(2m-1) \dots 2}{(2i+1)(2i+3) \dots (4i+2m-1)} \cdot \frac{2}{2i+2m+1}$$

и

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2i} \psi d\psi = \frac{1 \cdot 3 \dots (2i-1)}{2 \cdot 4 \dots 2i} \cdot 2\pi,$$

откуда мы выводим, если $n=2q+1$,

$$\int_0^{\pi} \cos^{2(q+1)} \theta \sin \theta d\theta = \frac{2}{2q+3},$$

$$\int_0^{\pi} \cos^{2q} \theta \sin^3 \theta d\theta = \frac{2}{2q+3} \cdot \frac{2}{2q+1},$$

$$\int_0^{\pi} \cos^{2(q-1)} \theta \sin^5 \theta d\theta = \frac{2}{2q+3} \cdot \frac{2}{(2q+1)(2q-1)},$$

$$\int_0^{\pi} \cos^{2(q-2)} \theta \sin^7 \theta d\theta = \frac{2}{2q+3} \cdot \frac{2 \cdot 4}{(2q+1)(2q-1)(2q-3)} \text{ и т. д.}$$

и

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \psi d\psi = \frac{1}{2} \cdot 2\pi,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^4 \psi d\psi = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot 2\pi,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^6 \psi d\psi = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot 2\pi,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^8 \psi d\psi = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot 2\pi \text{ и т. д.}$$

Подставляя это в выражение для Q , получим:

$$Q = \frac{4\pi}{2q+3} a (a^2 + b^2)^q,$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} v = & \frac{4\pi a}{r} \left\{ \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{2}{1} k + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{3}{1} k^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{4}{1} k^4 + \dots \right) - \right. \\ & - \frac{a^2 + b^2}{5} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} k + \frac{1 \cdot 3 \dots 9}{2 \cdot 4 \dots 10} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} k^2 - \right. \\ & \left. \left. - \frac{1 \cdot 3 \dots 11}{2 \cdot 4 \dots 12} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} k^4 + \dots \right) + \right. \\ & + \frac{a^2 + b^2}{7} \left(\frac{1 \cdot 3 \dots 9}{2 \cdot 4 \dots 10} - \frac{1 \cdot 3 \dots 11}{2 \cdot 4 \dots 12} \cdot \frac{6 \cdot 5 \dots 2}{1 \cdot 2 \dots 5} k + \right. \\ & + \frac{1 \cdot 3 \dots 13}{2 \cdot 4 \dots 14} \cdot \frac{7 \cdot 6 \dots 3}{1 \cdot 2 \dots 5} k^2 - \frac{1 \cdot 3 \dots 15}{2 \cdot 4 \dots 16} \cdot \frac{8 \cdot 6 \dots 4}{1 \cdot 2 \dots 5} k^4 + \dots \left. \right) - \\ & - \frac{a^2 + b^2}{9} \left(\frac{1 \cdot 3 \dots 13}{2 \cdot 4 \dots 14} - \frac{1 \cdot 3 \dots 15}{2 \cdot 4 \dots 16} \cdot \frac{8 \cdot 7 \dots 2}{1 \cdot 2 \dots 7} k + \right. \\ & \left. + \frac{1 \cdot 3 \dots 17}{2 \cdot 4 \dots 18} \cdot \frac{9 \cdot 8 \dots 3}{1 \cdot 2 \dots 7} k^2 - \frac{1 \cdot 3 \dots 19}{2 \cdot 4 \dots 20} \cdot \frac{10 \cdot 9 \dots 4}{1 \cdot 2 \dots 7} k^4 + \dots \right) + \dots \left. \right\}. \end{aligned}$$

Но мы предположили, что $a = 2k^{\frac{1}{2}} \frac{z}{r}$, $b = 2k^{\frac{1}{2}} \frac{x}{r}$, $\left(\frac{r'}{r}\right)^2 = k$;

подставляя в предыдущий ряд, мы получим:

$$v = \frac{8\pi r' z}{r^3} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{2}{1} \frac{k}{3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{k^2}{3} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{4}{1} \cdot \frac{k^3}{3} + \dots \right. \\ \left. + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{2^2}{5} k - \frac{1 \cdot 3 \dots 7}{2 \cdot 4 \dots 8} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{2^2}{5} k^2 + \right. \\ \left. + \frac{1 \cdot 3 \dots 9}{2 \cdot 4 \dots 10} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{2^2}{5} k^3 + \dots \right. \\ \left. + \frac{1 \cdot 3 \dots 9}{2 \cdot 4 \dots 10} \cdot \frac{2^4}{7} k^2 - \frac{1 \cdot 3 \dots 11}{2 \cdot 4 \dots 12} \cdot \frac{6 \cdot 5 \dots 2}{1 \cdot 2 \dots 5} \cdot \frac{2^4}{7} k^3 + \dots \right. \\ \left. + \frac{1 \cdot 3 \dots 13}{2 \cdot 4 \dots 14} \cdot \frac{2^6}{9} k^3 + \dots \right]$$

Но так как вообще

$$\frac{1 \cdot 3 \dots (4q+1)}{2 \cdot 4 \dots 2(2q+1)} \cdot \frac{2^{2q}}{2q+3} - \frac{2q}{1} \frac{1 \cdot 3 \dots (4q-1)}{2 \cdot 4 \dots 4q} \cdot \frac{2^{2q-2}}{2q+1} + \\ + \frac{(2q-1)(2q-2)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \dots (4q-3)}{2 \cdot 4 \dots 2(2q-1)} \cdot \frac{2^{2q-4}}{2q-1} - \\ - \frac{(2q-2)(2q-3)(2q-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1 \cdot 3 \dots (4q-5)}{2 \cdot 4 \dots 2(2q-2)} \cdot \frac{2^{2q-6}}{2q-3} + \dots \\ + \frac{q+1}{1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \dots (2q+1)}{2 \cdot 4 \dots (2q+1)} \cdot \frac{1}{3} = 0,$$

то

$$v = \frac{4\pi r' z}{3r^3}.$$

Теперь мы найдем без всякого затруднения

$$A = -\mu p r'^2 \frac{dv}{dx} = \frac{4\pi \mu p r'^3 z x}{r^5}, \\ C = -\mu p r'^2 \frac{dv}{dz} = \frac{4\pi \mu p r'^3 z^2}{r^5} - \frac{4\pi \mu p r'^3}{3r^3},$$

откуда

$$\frac{A}{C} = \frac{xz}{z^2 - \frac{1}{3} r^2}.$$

Из последнего уравнения вытекает, что отношение A к C не зависит от полудиаметра магнитной сферы, находящейся внутри Земли.

Предположим теперь, что сфера магнитного ядра, находящегося внутри Земли, является концентричной с земным шаром; в этом случае плоскость x и y становится плоскостью экватора, и если обозначить через λ магнитную широту, то

$$z = r \sin \lambda, \quad x = r \cos \lambda,$$

и, следовательно,

$$\frac{A}{C} = \frac{\sin \lambda \cos \lambda}{\sin^2 \lambda - \frac{1}{3}}.$$

Обозначим, наконец, через I наклонение магнитной стрелки и через F напряженность.

Тогда мы получим:

$$\begin{aligned} A &= F \sin(180 - I - \lambda) = +F \sin(I + \lambda), \\ C &= F \cos(180 - I - \lambda) = -F \cos(I + \lambda), \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\operatorname{tg}(I + \lambda) = -\frac{\sin \lambda \cos \lambda}{\sin^2 \lambda - \frac{1}{3}} = \frac{\sin^2 \lambda}{\cos^2 \lambda - \frac{1}{3}},$$

или, иначе,

$$\operatorname{tg} I = 2 \operatorname{tg} \lambda.$$

Первое уравнение является тем, которое было найдено Био в предположении, что в центре Земли находится весьма малый магнит или два бесконечно близких центра магнитного действия. Но предыдущее вычисление показывает, что I не зависит от полудиаметра магнитной сферы, находящейся в середине Земли, считая ее концентричной с земным шаром: можно заключить, что в этом случае магнитное наклонение будет таким же, и это показывает действие магнитного ядра, заключенного внутри Земли, или действие всех магнитных частичек, рассеянных в веществе.

Апрель 1836 г.



ГАУСС И ЕГО РАБОТЫ ПО ЗЕМНОМУ МАГНЕТИЗМУ

I. Краткая биография¹

Карл Фридрих Гаусс родился 30 апреля 1777 г. в Брауншвейге. Отец его занимался ремеслом фонтанного мастера, а также садовника, иногда он выполнял обязанности счетовода, так как умел хорошо писать и считать. Мать Гаусса до замужества находилась в услужении; она с трудом читала и совершенно не умела писать.

Биографы отмечают раннее умственное развитие Гаусса и, в особенности, развитие его вычислительных способностей. Сам Гаусс любил в шутку говорить о себе, что он научился считать раньше, чем говорить.

В 1784 г. Гаусс поступил в народную школу. В третьем классе школы десятилетний Гаусс подружился с помощником учителя школы восемнадцатилетним Бартельсом;² они вместе читали книги по математике, и Гаусс познакомился с биномом и

¹ При составлении биографии Гаусса были использованы следующие источники: 1) Sartorius von Waltershausen. Gauss zum Gedächtnis. Leipzig, 1856; 2) А. С. Савельев. Карл Фридрих Гаусс. ЖМНП, ч. XCVII и XCVIII, СПб., 1858; 3) Winnecke. Gauss. Ein Umriss seines Lebens und Wirkens. 1877; 4) Hänselmann. Gauss. Zwölf Kapitel aus seinem Leben. Leipzig, 1878; 5) В. В. Бобынин. Биографии знаменитых математиков XIX столетия. Вып. V. Карл Фридрих Гаусс. М., 1889.

² Иоганн Мартин Бартельс (1769—1836) — впоследствии профессор Казанского университета, руководитель магистерских занятий Н. И. Лобачевского и И. М. Симонова.

бесконечными рядами. В 1788 г. Гаусс из начальной школы перешел в гимназию, где с невероятной быстротой изучил древние языки, а в 1792 г., пользуясь материальной поддержкой герцога Брауншвейгского, поступил в Коллегию Карла, где усовершенствовал знание древних языков и изучил основные европейские языки. В Коллегии Гаусс самостоятельно начал изучение трудов Ньютона и Эйлера.

К началу творческой деятельности Гаусса Германия состояла из нескольких сотен мелких королевств, основанных на феодально-крепостнических отношениях со средневековыми пережитками; эта феодальная раздробленность была причиной отсталости Германского государства по сравнению с Англией и Францией. Экономическому и политическому положению Германии того времени соответствовал и низкий уровень наук, в особенности физико-математических. Во Франции уже в середине XVIII в. были известны блестящие имена Клеро, Даламбера, Лагранжа, Лапласа, занимавшихся основной проблемой того времени — разработкой небесной механики на основании закона всемирного тяготения; в конце XVIII в., в результате буржуазной революции, уничтожившей препятствия для развития промышленного капитализма, во Франции начали развиваться технические науки и соответствующими мероприятиями революционного Конвента были созданы специальные технические школы (особенно известной была Политехническая школа). В противоположность Франции, в немецких университетах преподавались преимущественно гуманитарные науки; изучение физики и математики было в зачаточном состоянии.

В октябре 1795 г. Гаусс поступил в Геттингенский университет. Здесь он не мог сначала решить, чему отдать предпочтение — филологии или математике; он с большим интересом слушал филологические лекции, с меньшим интересом — лекции единственного геттингенского математика Кестнера и одновременно занимался собственными математическими исследованиями.

Склонность к изучению языков сохранилась у Гаусса на всю жизнь: в возрасте 62 лет Гаусс начал самостоятельно изучать русский язык и в течение двух лет овладел им настолько, что мог свободно читать произведения русских писателей и поэтов, — об этом упоминает профессор Казанского университета И. М. Симонов,¹ посетивший Гаусса в Геттингене в 1842 г. Из переписки Гаусса с Шумахером² в 1840 г. можно видеть, что Гаусс читал, например, „Бориса Годунова“ Пушкина, руководство русского академика Купфера по производству магнитных и метеорологических наблюдений; из Петербурга Шумахер привез Гауссу сочинения Бестужева, познакомив Гаусса с биографией последнего. В 1841 г. Шумахер посылал на отзыв Гауссу работу некоего майора Яниша по механике на русском языке...

В Геттингене студента Гаусса привлекала богатая библиотека. В письме к своему учителю Циммерману (профессору математики Коллегии Карла в Брауншвейге) восемнадцатилетний Гаусс пишет: „Я видел библиотеку и предвижу, что она даст многое для моего счастливого существования в Геттингене. Я уже имею дома несколько томов «*Commentariis Academiae Scientiarum Petropolitanae*» [«Комментарии Петербургской Академии Наук»] и просмотрел еще большее количество томов. Я не могу скрывать, что мне было очень неприятно обнаружить, что больша́я часть моих интересных открытий в анализе бесконечно малых оказалась сделанной во второй раз. Что меня утешает, так это то, что все открытия Эйлера, которые я до сих пор нашел, я сделал тоже, но, кроме того, еще и некоторые другие. Я нашел более общую и, как мне кажется, более естественную точку зрения; я вижу перед собой еще необозримое поле, а Эйлер делал свои открытия

¹ И. М. Симонов. Записки и воспоминания о путешествии по Англии, Франции, Бельгии и Германии в 1842 году. Казань, 1844.

² Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und H. C. Schumacher. Altona, 1860—1862.

через промежуток в несколько лет после некоторых предварительных *tentaminibus* [попыток]“.

В 1795 г. Гаусс открыл способ наименьших квадратов, а в 1796 г. нашел теорию деления круга для построения семнадцатигульника. Кроме того, Гаусс, по его собственным словам, с 15 лет начал размышлять над неевклидовой геометрией.¹

В 1798 г. Гаусс вернулся в Брауншвейг; здесь средствами к его существованию являлись как стипендия герцога, так и частные уроки.

В 1799 г. была опубликована работа Гаусса по теории алгебраических уравнений — „Новое доказательство теоремы, что всякая целая рациональная алгебраическая функция одного переменного может быть разложена на действительные множители первой или второй степени“ („*Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolve posse*“). Эта работа была представлена в том же году философскому факультету Гельмштедтского университета в качестве диссертации. Гаусс заочно получил докторскую степень.

В 1801 г. был опубликован труд Гаусса по теории чисел — „Арифметические рассуждения“ („*Disquisitiones arithmeticae*“). В этом же году Гаусс произвел вычисление орбиты Цереры по немногочисленным наблюдениям в Палермо Пиацци, открывшим эту планету 1 января 1801 г.; с помощью вычислений Гаусса Церера была вновь найдена на небе. В 1802 г. Гауссом была вычислена орбита Паллады. О своих работах Гаусс сообщал Петербургской Академии Наук.²

¹ См.: В. Ф. Каган. Лобачевский, гл. XXVIII и XXIX. Изд. АН СССР, М.—Л., 1948.

² Переписка Гаусса в период 1801—1807 гг. с непременным секретарем Петербургской Академии Наук Н. И. Фуссом опубликована А. Н. Крыловым в „Трудах Института истории науки и техники“, 1934, серия 1, вып. 3, стр. 209—238; письма Гаусса 1802—1803 гг. к петербургскому академику астроному Ф. И. Шуберту опубликованы в „Научном наследстве“, т. I, 1948, Институт истории естествознания АН СССР.

В начале 1802 г. Петербургская Академия Наук избрала Гаусса в число своих членов-корреспондентов, а осенью того же года предложила Гауссу заведование астрономической обсерваторией. Гаусс отказался от этого предложения. Русское правительство неоднократно возобновляло это предложение. Впоследствии, в 1824 г., Гаусс был избран в число иностранных членов Петербургской Академии Наук.

Материальное положение Гаусса в период 1801—1806 гг. постепенно улучшалось, так как после каждого приглашения Гаусса в Россию герцог Брауншвейгский повышал стипендию, выдаваемую Гауссу. Однако из писем Гаусса в Петербургскую Академию Наук видно, насколько не обеспечено все же было положение ученого в Германии и как стремился Гаусс приобрести независимое положение, при котором он мог целиком отдаться научным занятиям.

В годы пребывания в Брауншвейге Гаусс занимался, главным образом, теоретической астрономией, вычисляя орбиты Паллады, Юноны и Весты.

В 1807 г. по приглашению ганноверского правительства Гаусс переехал в Геттинген, заняв должность профессора астрономии и директора обсерватории Геттингенского университета. Здесь он занялся устройством обсерватории и подготовкой к астрономическим наблюдениям, а в 1808—1809 г. начал чтение лекций по астрономии.

В 1809 г. вышел в свет труд Гаусса „Теория движения небесных сил по коническим сечениям, окружающим Солнце“ („Theoria motus corporum coelestium“), где Гаусс изложил метод определения планетных орбит по трем наблюдениям с помощью способа наименьших квадратов.

Как указывает биограф Гаусса Сарториус Вальтерсгаузен, эта работа явилась большим достижением Гаусса: если Эйлер для вычисления орбиты кометы 1769 г. при тогдашних методах вычисления должен был затратить целых три дня напряженной работы, в результате которой он потерял

зрение, то Гаусс это сложное вычисление по выведенным им формулам произвел в течение одного часа.

Занимаясь изучением орбиты Паллады, Гаусс опубликовал три математические работы: „О гипергеометрическом ряде“, где дал первый критерий сходимости ряда (1812); „О механических квадратурах“ (1814); „О вековых возмущениях“ (1818).

Последующие годы пребывания в Геттингене были посвящены, главным образом, градусным измерениям и работам по общей съемке страны, в которых Гаусс принимал участие по приглашению правительства начиная с 1818 г.; кроме того, Гаусс занимался практической астрономией, устанавливал приборы в новой обсерватории, построенной в 1816 г. В это время Гауссом были написаны статьи „Определение разности широт между обсерваториями Геттингена и Альтоны“ (опубликовано в 1828 г.) и „Исследования по вопросам высшей геодезии“ (опубликовано в 1843 г.), явившиеся результатом геодезических работ, выполненных им в Ганновере. Теоретическое значение этих работ таково, что Гаусса считают создателем высшей геодезии. Гаусс занимался также и дифференциальной геометрией, — в 1827 г. им была опубликована статья „Общие исследования о кривых поверхностях“.

Кроме геодезической съемки Ганновера, в этот же период по поручению ганноверского министерства внутренних дел Гауссу была предложена чрезвычайно трудоемкая работа — пересмотр системы мер и весов в стране и подготовка перехода к нормальным мерам. На эту мало интересную для него работу Гаусс затратил очень много времени и энергии. Биограф Гаусса Виннеке справедливо замечает по этому случаю: „Многие современные Гауссу сферы ганноверского правительства имели весьма смутное представление о его научном значении“.

В 1810 г. Гаусс получил приглашение „занять кресло“ в Берлинской академии наук, но отклонил это предложение; в 1821—1824 гг. русское правительство вело переговоры о

приглашении Гаусса в качестве секретаря Академии, но условия были неподходящими для Гаусса, и Гаусс окончательно остался в Геттингене.

С 1831 по 1842 г. занятия Гаусса были посвящены почти исключительно экспериментальным и теоретическим исследованиям земного магнетизма; об этих исследованиях подробнее будет сказано ниже.

Дальнейшие годы жизни Гаусс преподавал теоретическую астрономию в Геттингенском университете, занимался геометрической оптикой, высшей геодезией, теоретической механикой, алгеброй.

Гаусс неоднократно возвращался к основной теореме алгебры, рассмотренной в его диссертации, и каждый раз приводил новые доказательства этой теоремы; последний раз он занимался этим вопросом в 1849 г. в связи с пятидесятилетним юбилеем его докторской деятельности. Скончался Гаусс 22 февраля 1855 г. в Геттингене.

Учеников у Гаусса было не много, в основном это были астрономы. Нелюбовь Гаусса к преподаванию объяснялась тем, что он очень ценил свое время, предпочитая заниматься только научной деятельностью, — будучи весьма требовательным к себе, он тратил на подготовку лекций очень много времени.

Столь же высокие требования предъявлял Гаусс и к изложению результатов своих научных работ. В письме к астроному Энке от 18 августа 1832 г., как и в некоторых письмах к Ольберсу, Гаусс говорит, что он всегда стремится опубликовывать только вполне законченные работы и что для уверенного написания одной строки часто требуются месяцы напряженного размышления. „Такой способ работы может иногда иметь те последствия, и иногда имел их, что идеи, которыми я обладал уже в течение многих лет, открывались также и другими и становились известными раньше, чем мои; вероятно также, что некоторые идеи исчезнут вместе со мной, и я знаю, что некоторые из моих друзей

желают, чтобы я меньше работал в этом духе; но это никогда не может случиться, я не могу испытывать настоящей радости от недоделанного, а работа, от которой я не имею никакой радости, является для меня мучением. Пусть каждый работает в том духе, в котором ему больше всего нравится“.

Отношение Гаусса к научному творчеству обрисовано Сарториусом Вальтерсгаузенем — профессором геологии Геттингенского университета, посещавшим Гаусса в его обсерватории и дома и написавшим воспоминания о Гауссе спустя несколько месяцев после его смерти. Он отмечает, что в молодости Гаусса захватывал такой поток идей, что он мог записать только часть своих мыслей.

По словам того же биографа, Гаусс рассматривал математику как главное средство развития человеческого интеллекта; одновременно с этим Гаусс был против механического применения аналитического метода. Он часто говорил, что не предпринимает вычисления до тех пор, пока проблема не будет мысленно решена до конца, и что вычисления служат только вспомогательным средством при выполнении работы.

Эту мысль он высказывает в письме к Шумахеру (1850 г.) следующим образом: „Характер математики нового времени (в противоположность старому) таков, что благодаря нашему способу обозначений и терминологии мы обладаем рычагом, при помощи которого самые запутанные рассуждения приводятся к известному механизму... Однако как часто применяется этот рычаг механически, хотя право пользования им в большинстве случаев молчаливо подразумевает определенные исходные предположения. Я требую, чтобы при всяком применении вычисления, при пользовании всеми терминами никогда не упускались из виду исходные условия“.

Исследуя какой-либо практический вопрос, решая какую-либо определенную задачу, Гаусс попутно приходил к неко-

торой новой идее и получал новые результаты. Так, исследование орбит планет привело Гаусса к разработке способа наименьших квадратов, которым теперь неизменно пользуются при обработке большого числа наблюдений любых физических величин; работы по триангуляции Ганновера привели Гаусса к созданию высшей геодезии; исследование трудноуловимых и загадочных явлений земного магнетизма — к созданию абсолютной системы физических единиц; наблюдения с магнитометрами натолкнули Гаусса и Вебера на мысль об устройстве электромагнитного телеграфа. Этот перечень можно было бы продолжить. Отсюда видно, что решение чисто практических вопросов, выдвигавшихся в то время развитием науки и техники в Германии, приводило Гаусса к разработке важных теоретических проблем.

Биографы Гаусса отмечают, что хотя сам он происходил из трудовой семьи, однако интересы народа ему были, вообще говоря, совершенно чужды; он всегда оставался в стороне от тех политических событий, которыми сопровождались экономические сдвиги на его родине. Он был глух к событиям в Вартбурге 1817 г., когда иенские студенты и профессора организовали антиправительственную манифестацию против немецкой реакции и призывали к борьбе за единую Германию.

В 1837 г. Гаусс не поднялся до протеста против отмены королем Ганновера конституции 1833 г., как это сделали семь профессоров Геттингенского университета, уволенные затем правительством; в это время имя Гаусса было известно далеко за пределами Германии, и выступление Гаусса на стороне уволенных профессоров могло бы иметь большой моральный вес.

Давая ниже обзор работ Гаусса, мы ограничимся только теми из них, которые посвящены земному магнетизму, хотя и в других разделах математики — в теории чисел, в алгебре, в теоретической астрономии, в механике, в высшей геодезии — его работы были столь же основоположными и фунда-

ментальными и утвердили за ним звание „*Mathematicorum princeps*“ („Первый из математиков“), как гласила надпись, выгравированная на медали в его память.¹

II. Работы Гаусса по земному магнетизму

Как уже было сказано выше, начиная с 1831 г. главный интерес Гаусса сосредоточился на физике. После открытия электромагнетизма (Эрстедом в 1820 г.) и явления индукции (Фарадеем в 1831 г.) эта новая область физики начала бурно развиваться.

Встреча Гаусса с Гумбольдтом² в 1828 г. привела к тому, что Гаусс заинтересовался явлениями земного магнетизма. В области магнитных явлений и земного магнетизма еще не были разработаны точные научные определения магнитных величин и основания магнитных измерений.

¹ Обзор работ К. Ф. Гаусса по механике см.: Н. Н e p p e r t. *Über Gauss' Arbeiten zur Mechanik*. Gauss Werke, B. X, Abt. 2, 1924.; обзор работ по физике см.: Cl. S c h a e f e r. *Über Gauss' physikalische Arbeiten*. Gauss Werke, B. XI, Abt. 2, 1929.

² А. Гумбольдт (1769—1859) — известный немецкий ученый — географ, геолог, геофизик. Очень интересно обстоятельное письмо (1836 г.) Гумбольдта к президенту Королевского общества в Лондоне герцогу Суссекскому, в котором Гумбольдт рассказывает об истории возникновения наблюдений магнитных вариаций в северном полушарии и намечает устройство магнитных станций вблизи магнитного экватора и в южном полушарии. Гумбольдт просит герцога обсудить предлагаемый им план совместно с ученым обществом в Геттингене, Королевским институтом во Франции и с Петербургской Академией Наук. В письме сообщается о решении русской Академии Наук об открытии магнитных обсерваторий в России, содержатся сведения о работах русского академика А. Я. Купфера по земному магнетизму.

Это письмо опубликовано в переписке Гумбольдта с Гауссом (*Briefe zwischen A. v. Humboldt und Gauss*. Herausgegeben von Bruhns. Leipzig, 1877) и, кроме того, в статье Шеринга (E. S c h e r i n g. *C. F. Gauss und die Erforschung des Erdmagnetismus*. *Abhandlungen der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, B. 34. Göttingen. 1887).

В Геттингенский университет в 1831 г. был приглашен молодой физик Вильгельм Вебер, окончивший университет в Галле и преподававший там же физику начиная с 1827 г. После кратковременного увлечения кристаллографией (летом 1831 г.) Гаусс вместе с Вебером начали проводить исследования по земному магнетизму и электромагнетизму. Гауссу в это время было 54 года, Веберу — 27 лет; это научное содружество продолжалось ряд лет и было чрезвычайно плодотворным.

Развитие научных интересов Гаусса в области земного магнетизма можно проследить из переписки его с астрономами Ольберсом, Шумахером, Энке и Герлингом, которую он вел регулярно в течение ряда лет и даже десятилетий. Письма Гаусса представляют собой своеобразные научные отчеты, написанные очень живо, иногда не столь безукоризненным и точным языком, как его статьи; по этим письмам можно судить о необычайной работоспособности Гаусса, об его увлечении магнитными измерениями. „Я не знаю ничего более интересного из практических занятий, чем эти магнитные наблюдения“, — пишет, например, Гаусс Шумахеру 31 августа 1832 г.; в письмах Гаусс дает оценку результатов своих исследований и высказывает свое отношение к научному творчеству.

18 февраля 1832 г. Гаусс пишет Ольберсу:¹ „Я занимаюсь земным магнетизмом, именно — *абсолютным* определением его напряженности. Мой друг Вебер производит опыты по моим указаниям. Так же, как можно дать ясное определение, например, скорости путем установления времени и пространства, я нахожу, что для полного определения напряженности земного магнетизма должны быть даны: 1) $\text{вес} = p$, 2) $\text{отрезок} = r$, и тогда можно выразить земной магнетизм через $\frac{\sqrt{p}}{r}$, т. е. при данном r удвоенный земной

¹ W. Olbers, sein Leben und seine Werke, herausgegeben von Schilling, B. I, Abt. 1 u. 2 Berlin, 1894.

магнетизм потребует увеличения веса в четыре раза, или при данном весе — вдвое меньшего расстояния r ¹.

Далее Гаусс коротко сообщает способ абсолютного определения горизонтальной напряженности, указывая, что для этого необходимо два магнита A и B : действие магнита A на магнит B сравнивается с действием земного магнетизма на магнит B ; действие земного магнетизма на магнит A определяется из наблюдений периода колебаний магнита A . В конце письма Гаусс добавляет: „Я надеюсь также с помощью Вебера дать несколько новых усовершенствований для склонения и наклона“.

В письме от 2 августа того же года Гаусс пишет Ольберсу о том, что он занимается почти исключительно магнетизмом:

„Эти работы до сих пор не только оправдали мои ожидания, но и превзошли их. Мне всегда казалось, что приборы, применяемые для магнитных наблюдений, являются весьма несовершенными и находятся в вопиющем противоречии с точностью наших астрономических и геодезических измерений. В течение 5 месяцев я задавался целью преодолеть эти недостатки, причем сначала я исходил из некоторых идей, имевшихся у меня уже в течение многих лет; однако почти каждую неделю я находил что-нибудь новое. В настоящее время у меня готово два прибора (совершенно одинаковых), при помощи которых можно измерять абсолютное склонение и его изменения, время колебаний и т. д. с такой точностью, которая не оставляет желать ничего более совершенного, за исключением специального помещения, где нет поблизости никакого железа и токов воздуха. Оба эти условия отсутствуют у меня в астрономической обсерватории и в моем доме, хотя и не нужно переоценивать влияния железа; но и в теперешнем состоянии мои измерения превосходят, как я считаю, очень далеко все прежнее.

¹ Здесь Гаусс говорит о размерности магнитной массы.

„Здесь можно собрать очень богатый урожай, и я склонен посвятить этому вопросу собственную работу, если небо сохранит мне жизнь и силы, но я сделаю это совсем не так скоро, так как я всегда ненавидел всякую спешку с незаконченным. Между тем я намерен сразу же сделать отчет на заседании общества о наиболее важном применении — именно об определении абсолютной напряженности земного магнетизма“.¹

Далее Гаусс сообщает Ольберсу о результатах абсолютного определения горизонтальной напряженности магнитного земного поля в Геттингене, причем за основные единицы были выбраны миллиграмм, миллиметр и секунда; наблюдение с разными магнитами дало расхождение не более $\frac{1}{2000}$.

Гаусс не только создал метод абсолютного определения напряженности, но и повысил точность магнитных измерений, прикрепив к подвешенному магниту зеркало и измеряя угол отклонения магнита при помощи трубы и шкалы, установленных на расстоянии нескольких метров от зеркала магнита. Гаусс первый применил этот точный и удобный прием измерения углов поворота, который обычно в учебниках физики именуется методом Кольрауша. Такой способ измерения углов отклонения магнита позволил Гауссу впервые подтвердить с достаточной точностью, что поле магнита меняется обратно пропорционально кубу расстояния от центра магнита, как это должно следовать из закона Кулона о взаимодействии между точечными магнитными массами.

В письме к Герлингу² 2 апреля 1832 г. Гаусс сообщал: „Суточные вариации я могу прослеживать теперь от одной

¹ Этот отчет, как указывалось выше, был сделан Гауссом 15 декабря 1832 г. на заседании Королевского ученого общества в Геттингене. Полностью же труд Гаусса „Напряженность земной магнитной силы, приведенная к абсолютной мере“ был опубликован в 1841 г. в „Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores“, т. VIII.

² Письма Гаусса к астрономам Герлингу, Энке, Ханстину, касающиеся вопросов земного магнетизма, содержатся в „Gauss Werke“ (В. XII. Berlin, 1929).

минуты к другой, с точностью нескольких секунд угла. Я надеюсь далеко превзойти ту точность, которая до сих пор была при определении напряженности, склонения, наклонения и их вариаций. Период колебания уже теперь я определяю с почти невероятной точностью". Свои достижения в области измерений магнетизма Гаусс описывает также в письме к Энке от 12 мая 1832 г., а в письме к Герлингу 20 июня того же года говорит: „Мои приборы теперь так совершенны, что не оставляют желать ничего лучшего“.

Усовершенствуя методы магнитных измерений, Гаусс одновременно размышляет и над физическим содержанием основных понятий магнетизма.

В письме к Энке 18 августа 1832 г. Гаусс говорит: „В современном изложении учения о магнетизме столько неясного, ничего не говорящего, нелогичного (так же у самого Био), что оно должно быть построено совершенно заново. Сюда относится понятие полюса. Затем вопиющее противоречие с тем, что сначала принимают, что в каждой частице магнита находится поровну как северного, так и южного магнетизма, а затем все же говорят, что на одном конце магнита находится исключительно один магнетизм, а на другом конце — другой магнетизм... В этих предметах я уже давно достиг полной ясности; сюда относятся некоторые новые, в высшей степени интересные теоремы *очень глубокого* содержания, развитие которых выходит очень далеко за пределы моей статьи и которые я поэтому должен отметить в ней только несколькими строками“.¹

Предложенный Гауссом метод определения напряженности магнитного поля применяется с незначительными изменениями („метод Гаусса—Ламона“) и поныне.

¹ Можно думать, что в этом письме Гаусс говорит уже о тех теоремах, которые позже были им использованы для „Общей теории земного магнетизма“ и затем изложены в работе „Общие теоремы относительно сил притяжения и отталкивания, действующих обратно пропорционально квадрату расстояния“.

Однако значение работы Гаусса „Интенсивность земной магнитной силы, приведенная к абсолютной мере“ заключается не только в создании метода абсолютного определения напряженности магнитного поля: эта работа имела, кроме того, значение для всей физики благодаря установлению „абсолютных“ единиц. Разработка абсолютной системы единиц явилась огромной заслугой Гаусса.

Из множества разнообразных физических величин Гаусс выбрал, в качестве основных, длину, массу и время, приняв за единицы миллиметр, миллиграмм и секунду; все остальные физические величины должны, таким образом, измеряться в производных единицах.¹

Магнитные наблюдения в течение 1831, 1832 и, частично, в 1833 гг. производились Гауссом и Вебером в астрономической обсерватории Геттингена, а с осени 1833 г. в магнитной обсерватории, построенной в Геттингене вблизи астрономической обсерватории.

По показаниям магнитометров склонения и горизонтальной составляющей можно было следить за изменением этих элементов в течение дня. Время от времени здесь производились также и абсолютные определения напряженности земного поля. Так же, как раньше в астрономической обсерватории, здесь были устроены приспособления для опытов и измерений по электромагнетизму.

¹ В настоящее время основными единицами являются сантиметр, грамм и секунда (абсолютная система cgs). Система магнитных и электрических единиц представляет собой часть системы cgs, причем для установления единиц количества магнетизма и количества электричества служат законы Кулона; первый конгресс по электричеству в Париже в 1881 г. принял обе системы — и электромагнитную, в основе которой лежит единица магнитной массы, и электростатическую, в основе которой лежит единица количества электричества. В дальнейшем, в развитие идей Гаусса и Вебера, была принята „практическая“ система электрических и магнитных единиц и началось фактическое осуществление эталонов электрических и магнитных единиц.

Эти приборы оказали большую услугу Гауссу и Веберу при исследовании математического закона, которому подчиняется явление электромагнитной индукции, открытое Фарадеем, и также для вопроса приведения электромагнитного действия к абсолютной мере.¹

По предложению А. Гумбольдта Гауссом в 1834 г. был организован „Магнитный союз“ физиков, проживавших в различных городах Германии, а также и за границей. Целью Магнитного союза являлось проведение наблюдений вариаций и бурь магнитного склонения, выяснение зависимости суточного хода склонения и магнитных бурь от географического положения пунктов. „Знание вариаций и бурь магнитного склонения имеет громадный практический интерес. Мореплавателю, геодезисту и маркшейдеру весьма важно знать, насколько частым и сильным воздействиям подвержены приборы, применяющиеся в их деле, хотя бы для того, чтобы определить степень доверия к своим наблюдениям“, — писал Гаусс во введении к ежегоднику „Результаты наблюдений Магнитного союза“, издание которого было предпринято Гауссом и Вебером начиная с 1837 г.

В конце 1828 г. Гумбольдт устроил в Берлине специальное помещение, при постройке которого железо отсутствовало, и в нем производил наблюдения по вариационному компасу Гамбея. По инициативе Гумбольдта обладатели аналогичных приборов в различных местах стали в условленные дни (8 раз в год, каждый раз по 44 часа подряд, ежечасно) наблюдать магнитные вариации. Такие наблюдения происходили в 1829 и 1830 гг. в Берлине, Фрейберге, Петербурге, Казани и Николаеве.

В Геттингенской магнитной обсерватории, устроенной в 1833 г., оснащенной совершенно иными приборами, наблю-

¹ См. посмертно опубликованные в т. V Собрания сочинений Гаусса его записки — „К математической теории электродинамических действий“.

дения вариаций стали производить не ежечасно, а через каждые 10 минут, иногда и через 5 минут. В течение лета 1834 г. круг наблюдателей значительно расширился. В дальнейшем число сроков было сокращено до 6 в год, а продолжительность каждого срока установлена в 24 часа. Приборы, аналогичные геттингенским, появились в Альтоне, Аугсбурге, Берлине, Бонне, Брауншвейге, Бреде, Бреслау, Касселе, Копенгагене, Дублине, Фрейберге, Геттингене, Гринвиче, Галле, Казани, Кракове, Лейпциге, Милане, Марбурге, Мюнхене, Неаполе, Петербурге и Упсале.

Наблюдения Магнитного союза обнаружили одновременность появления магнитных бурь во всех пунктах и уменьшение их интенсивности к югу. Факт связи полярных сияний с магнитными бурями в то время был уже хорошо известен. Однако о причине возникновения магнитных бурь Гаусс не делает никаких гипотез: „Для предположений о причинах магнитных изменений еще слишком мало данных, и я всегда не склонен или, по крайней мере, стесняюсь делать предположения там, где отсутствуют основания. Но я не считаю причины космическими в том смысле, какой обычно придают этому слову. Вопрос может быть только в том, где они находятся: ниже или выше земной поверхности. Я надеюсь, что исследования этого вопроса в будущем явятся решающими“. (Письмо к Ольберсу в феврале 1835 г.).

В письме к Ольберсу 18 марта 1836 г. Гаусс опять повторяет: „...там, где отсутствуют всякие основания, я ненавижу все гипотезы“. Высказывания такого рода, повторяемые по различным поводам, характерны для Гаусса.

„Результаты наблюдений Магнитного союза“ выходили с 1837 по 1843 г. В „Результатах“ печатались не только данные наблюдений, но и теоретические статьи по земному магнетизму, статьи по магнитному приборостроению, по методике магнитных наблюдений. Работа Гаусса „Общая теория земного магнетизма“ была впервые опубликована именно

в „Результатах“. Здесь же печатались статьи Гаусса по вопросам магнитных измерений, статьи Вебера и ряд статей других авторов; в 1843 г. здесь была опубликована статья профессора Казанского университета И. М. Симона „О новом методе определения абсолютного склонения“.

Одновременно с занятиями по земному магнетизму и в связи с ними зимой 1833/34 г. Гаусс и Вебер увлеклись созданием электромагнитного телеграфа. Заметив, что измерение силы тока можно производить по его электромагнитному действию, Гаусс и Вебер использовали магнитометр в качестве гальванометра, поместив подвешенный магнит внутри мультипликатора — катушки, плоскость которой была расположена в магнитном меридиане. В письме к Ольберсу от 20 ноября 1833 г. Гаусс сообщает, что им проведена гальваническая цепь в воздухе над домами между астрономической обсерваторией и физическим кабинетом, длиной почти 8000 футов. В 1834 г. линия была продолжена от физического кабинета к магнитной обсерватории; ее длина увеличилась примерно до 9000 футов. В статье „Земной магнетизм и магнитометр“ Гаусс писал, что при помощи коммутатора, включенного в цепь, „можно так владеть движением стрелок, что можно им пользоваться для телеграфирования знаков, совершенно независимо от часа дня или погоды, из закрытой комнаты, и таким же образом получать эти знаки. Частые опыты передачи таким способом слов и коротких предложений имели полный успех. То, что здесь было лишь интересным физическим опытом, может быть исполнено, как с уверенностью можно предсказать, в гораздо большем масштабе, путем применения более сильных (вольтовых) столбов или иных электрических сил, сильных мультипликаторов и мощных проводов для телеграфных соединений на 10, 20 и более миль... Если бы можно было, не взирая на прочие обстоятельства, соединить металлически рельсы железных дорог, то можно было бы заменить ими про-

волочные провода... Ничто не препятствует введению электромагнитного телеграфа на громадное расстояние“.

Однако Гаусс и Вебер не были первыми создателями электромагнитного телеграфа. Известно, что зимой 1832 г. русский изобретатель П. Л. Шиллинг осуществил электромагнитный телеграф в Петербурге между Зимним дворцом и зданием Министерства путей сообщения. Шиллинг разработал также передаточный и приемный аппараты и применил впоследствии подземный кабель.¹

В переписке Гаусса с Ольберсом уделено много внимания электромагнитному телеграфу, электромагнитной машине, электродвигателю русского академика Якоби.

Последующие годы Гаусс продолжает заниматься созданием новых магнитных приборов и усовершенствованием методики измерений. Краткие отчеты о своих наиболее значительных работах в этой области Гаусс делает на заседаниях Королевского ученого общества в Геттингене.

По просьбе Шумахера Гаусс пишет для астрономического ежегодника, издаваемого Шумахером, обстоятельную популярную статью „О земном магнетизме и о магнитометре“.

Следующей работой Гаусса явилось создание бифилярного магнитометра, служившего как для определения горизонтальной составляющей напряженности магнитного поля, так и для измерения вариаций горизонтальной составляющей. Доклад об этой работе был сделан Гауссом на юбилейном заседании Геттингенского ученого общества 30 октября 1837 г. Измерения, произведенные летом 1837 г. с этим прибором, показали, что „...горизонтальная составляющая

¹ О телеграфе Шиллинга, см., например: „Очерк работ русских по электротехнике с 1800 по 1900 гг.“, под редакцией Я. И. Ковальского. СПб., 1900; Hamel J. Die Entstehung der galvanischen und electromagnetischen Telegraphie (Mélange physiques et chimiques tirés du Bulletin de l'Académie de St. Petersburg, vol. IV. St. Petersburg, 1860, Nu. 3, p. 227—289; Nu. 4, p. 401—409).

земного магнетизма теперь может наблюдаться так же точно, как звезды на небе"; в своем докладе Гаусс замечает также, что при измерении вертикальной составляющей подобная точность никогда не может быть достигнута, однако он убежден в том, что „...в этом отношении можно достичь гораздо большего, чем это было достигнуто до сих пор“. В статье „Об одном новом приборе, ближайшее назначение которого состоит в непосредственном наблюдении изменений напряженности горизонтальной части земного магнетизма“, опубликованной в „Результатах“ за 1837 г., описывается принцип действия этого прибора. Гаусс показывает здесь, что определение напряженности путем наблюдения времени колебаний магнита дает только среднее значение напряженности за тот довольно длительный промежуток времени, в течение которого происходят колебания магнита, и не позволяет судить о быстро протекающих вариациях напряженности за этот промежуток. „Продолжительность колебания стрелки здесь, однако, служит только для определения вращающего момента, с которым действует на стрелку сила земного магнетизма, когда стрелка не находится в магнитном меридиане. Если этот вращающий момент можно определять точно непосредственно, без наблюдений колебаний, и измерять его изменения уверенно, точно и быстро, то наша задача в основном будет разрешена“. Гаусс подвешивает горизонтальный магнит на двух параллельных нитях, устанавливает его закручиванием нитей приблизительно перпендикулярно магнитному меридиану и показывает, что чувствительность бифилярного магнитометра пропорциональна синусу угла отклонения магнита от магнитного меридиана. В этой статье Гаусс опять рассматривает и вопрос о телеграфировании.

В том же 1837 г. Гаусс пишет „Наставление к определению периода колебаний магнитной стрелки“. Рассмотрев наиболее рациональный способ определения периода колебаний магнита, Гаусс излагает теорию затухающих колеба-

ний магнита при действии силы сопротивления, пропорциональной скорости движения (магнитный демпфер, а также мультипликатор в замкнутой цепи, в которых колебания магнита индуцируют токи, тормозящие движения магнита), и показывает, какими способами можно изменять декремент затухания.

Совместная работа Гаусса с Вебером в магнитной обсерватории оборвалась в 1837 г., когда Вебер и другие шесть профессоров были уволены из университета в связи с протестом их против отмены новым королем Ганновера конституции, принятой в 1833 г. Эта конституция, утвержденная прежним королем Ганновера, до некоторой степени являлась откликом июльской революции 1830 г. во Франции и удовлетворяла некоторым либеральным требованиям.

Гаусс, мало общительный и консервативный по своему характеру и привычкам, поглощенный целиком своими научными занятиями, равнодушно отнесся к политическим переменам, но очень сожалел об утрате столь ценного сотрудника и пытался (безуспешно) восстановить положение Вебера в университете. Вебер вновь стал профессором Геттингенского университета лишь в 1849 г. и оставался там в этой должности до своей смерти в 1891 г.

Лишившись сотрудничества Вебера, Гаусс все же продолжает работу в магнитной обсерватории над усовершенствованием методики измерений.

В 1839 г. Гаусс печатает в „Результатах“ статью „Об одном способе облегчить наблюдение отклонений“, в которой рассматривается способ скорейшего установления стрелки в положении равновесия под действием силы земного магнетизма и некоторой другой посторонней силы, причем дается точный математический расчет, каким именно образом нужно действовать на стрелку — полем постороннего магнита или тока, чтобы стрелка быстрее успокоилась.

В 1840 г. в „Результатах“ появляется статья Гаусса „Об определении постоянных бифилярного магнитометра“,

где дается вывод уравнения равновесия магнита и рассматривается влияние различных погрешностей на определение величины вращающего момента, вызываемого действием горизонтальной составляющей на стрелку. Выводя уравнение равновесия магнита, подвешенного на двух нитях, Гаусс не учитывал кручения нитей, а также индукционного действия земного поля на магнит.¹

В том же году в „Результатах“ напечатана статья Гаусса „Правила для определения магнитного действия, оказываемого магнитом на расстоянии“; здесь выводятся формулы для расчета влияния друг на друга магнитных приборов, установленных в одном помещении. Это влияние необходимо учитывать, чтобы не допускать заметных искажений измеряемого земного поля.

В статье „О применении магнитометра для определения абсолютного склонения“ („Результаты“, 1841) Гауссом рассматривается вопрос об определении азимута вертикальной плоскости, проходящей через оптическую ось зрительной трубы.

Стремясь показать, что магнитные наблюдения и их обработку можно производить с астрономической точностью, Гаусс в течение 1842 г. при помощи стрелочного инклинатора провел наблюдения магнитного наклона в Геттингене и после обработки опубликовал их в „Результатах“.

¹ Впервые это учел академик Вильд, применяя свой способ определения напряженности поля на бифилярном магнитометре (Г. Вильд. О точности абсолютного определения горизонтальной напряженности земного магнетизма. Метеорологический сборник имп. Академии Наук, т. VIII, № 7, СПб. (1883), см. предварительную заметку в Bulletin de l'Acad. Imp. de St. Pétersbourg, t. XXVI, p. 69, Januar 1880. Почти одновременно с работой Вильда появилась работа Кольрауша (F. Kohlrausch. Über absolute Messungen mittels bifilarer Aufhängung, insbesondere zwei Methoden zur Bestimmung der erdmagnetischen Horizontal-Intensität ohne Zeitmessung. Wiedemann's Annalen der Physik und Chemie. Neue Folge, B. XVII, S. 737, 2 Decemberheft, 1882).

III. Работы Гаусса по теории земного магнетизма

Наряду с этими работами по методике измерения магнитного поля Земли Гаусс не переставал размышлять над вопросом создания математической теории земного магнетизма.

Первые мировые карты магнитного склонения были составлены в 1701—1702 гг. Галлеем, высказавшим предположение, что земной шар не является одним большим магнитом, как впервые в 1600 г. допускал Гильберт, а содержит два магнита, наклоненных под некоторым углом друг к другу. В 1756 г. академик Эйлер, не соглашаясь с Галлеем, предположил существование одного эксцентричного магнита внутри Земли.¹

Примерно в это же время (1759 г.) М. В. Ломоносовым было написано „Рассуждение о большей точности морского пути“, где им подчеркивалась необходимость исследования магнитного поля всего земного шара: „Рассуждения мои туда простираются, чтобы возбудить внимание мореплавателей, также и по земли путешествующих к испытанию магнитной силы во всех странах, куда только человек достигнуть может“. В этой работе Ломоносов высказал гениальную догадку о неоднородном намагничении Земли: „И так, положим, что Земля магнит из разных великих частей разной доброты составленной, или из многих магнитов разной силы в одном сложенной, которые по своему положению и крепости сил действуют; то необходимо следует, что на ней по разности мест должно быть разное магнитной стрелки склонение“.² Позже, после установления Кулоном закона о взаимодействии точечных магнитных масс (1789), Тобиас Майер, профессор математики и физики в Геттингене, показал, что для ограниченного числа пунктов на поверхности земли вы-

¹ Euler. Recherches sur la déclinaison de l'aiguille aimantée. Mem. de l'Académie de Berlin, 1756.

² Сочинение М. В. Ломоносова. Изд. Академии Наук, т. V, СПб., 1902, стр. 66—67.

численные значения склонения и наклонения хорошо согласуются с наблюдаемыми, если допустить гипотезу о бесконечно малом магните, находящемся на расстоянии $\frac{1}{7}$ земного радиуса от центра Земли.

Известный французский физик Био предположил, что в центре Земли находится магнитный диполь и что ось этого диполя не совпадает с осью Земли; между углом наклоения i и магнитной широтой φ пункта существует связь, выражаемая формулой $\operatorname{tg} i = 2 \operatorname{tg} \varphi$.¹ Однако если для некоторых пунктов Европы и Атлантического океана разность наблюдаемых углов наклоения и углов, вычисленных по указанной формуле, не превосходила $5-6^\circ$, то в Восточной Азии расхождение было совершенно неприемлемым. Для объяснения этого расхождения Био пришлось допустить существование второго эксцентрического диполя; в конце концов, для получения наиболее удовлетворительных результатов необходимо было предполагать бесчисленное множество диполей внутри земного шара.

Био поставил следующий вопрос: создается ли магнетизм Земли действительно бесконечно малым ядром внутри Земли или он является результатом действия всех магнитных частичек, рассеянных в Земле?²

Этим же вопросом задавался и Гаусс, как видно из письма его к Ханстину (директору обсерватории в Христиании) от 29 мая 1832 г., где Гаусс говорит: „Уже в течение многих лет я живо интересуюсь явлениями земного магнетизма... Мне не кажется, что открытие Эрстеда и его дальнейшее развитие дают нам право или — еще менее — прину-

¹ Эта формула представляет собой преобразование первоначальной формулы Био, сделанное русским академиком Крафтом в 1806 г. в статье „Essai sur une loi hypothetique des inclinaisons de l'aiguille aimantée en differents endroits de la terre“ (Мемуары Петербургской Академии Наук, 1809).

² B i o t J. B. *Traité de physique experimentale et mathématique*, t. III, Livre quatrième, chapitre X. Paris, 1816.

ждает нас отказаться от предположения, что основная причина явлений земного магнетизма состоит в притяжении и отталкивании, возникающих между (весьма неоднородно распределенными) магнитно-поляризованными молекулами твердых тел; интенсивность сил притяжения и отталкивания обратно пропорциональна квадрату расстояния. По моему мнению, этот закон повсюду подтверждается так же хорошо, как закон тяготения в астрономических явлениях. Насколько неравномерно могут быть распределены эти молекулы, покажет анализ определенных условий и зависимостей, которые должны иметь место для магнитных условий на земной поверхности, уже только вследствие предположения, что эти явления представляют собой взаимодействие элементарных притяжений и отталкиваний по вышеупомянутому закону. В дальнейшем я выведу наиболее замечательную из этих зависимостей, которая обнаружит факты необычайно большого интереса.

„Мое предположение приводит к тому, что магнитные явления на земной поверхности — исходя только из упомянутой точки зрения — могут быть, так сказать, собраны в одну формулу, которая, разумеется, должна содержать много членов, чтобы включать в себя всевозможные аномалии, не являющиеся исключительно локальными, т. е. ограниченными малой площадью, подобно тому как таблицы Луны состоят из большого числа уравнений.

Таким образом, исключается гипотеза двух или четырех полюсов, которую я не могу принять согласно сказанному выше. Все это дело будет проведено самым строгим образом, как только будут налицо факты в необходимой для этого форме“.

В последней фразе Гаусс подразумевает необходимость построения карт элементов X , Y , Z — северной, восточной и вертикальной составляющих земного магнетизма. В приведенном письме Гаусса содержится первый набросок его общей теории земного магнетизма.

Ответ на вопрос, поставленный Био, был дан, однако, еще до появления в 1839 г. „Общей теории земного магнетизма“ Гаусса профессором Казанского университета И. М. Симоновым, опубликовавшим „Опыт математической теории земного магнетизма“ — сначала в 1835 г. в Ученых записках Казанского университета, затем в 1837 г. в немецком журнале Крелля.¹

В этой работе И. М. Симонов показал, что магнитное поле Земли, вызванное суммарным действием множества магнитных частиц, рассеянных в ней, тождественно с магнитным полем диполя. При допущении однородного распределения магнитных частиц внутри Земли Симонов, таким образом, вывел выражение потенциала однородно намагниченной сферы, т. е. первого члена разложения магнитного потенциала Земли в ряд по шаровым функциям, выведенного позже Гауссом для общего случая — неоднородно намагниченной Земли.

Работа Гаусса „Общая теория земного магнетизма“ опубликована, как уже упоминалось, в 1839 г. в ежегоднике „Результаты наблюдений Магнитного союза за 1838 г.“. В этой работе Гаусс допустил, что магнитное поле Земли обладает потенциалом, зависящим от широты и долготы пункта. Предполагая, что источники магнитного поля находятся внутри Земли, Гаусс вывел выражение магнитного потенциала в виде ряда, расположенного по шаровым функциям. Не делая никаких предположений о законе распределения магнитных масс внутри Земли и ограничиваясь членами четвертого порядка, Гаусс по новейшим магнитным картам эмпирически определил значения 24 постоянных коэффициентов ряда для эпохи 1830 г.

Знание этого ряда для потенциала дает возможность вычислить северную, восточную и вертикальную составляющие

¹ Simonoff. Sur le magnétisme terrestre. Journal für die reine und angewandte Mathematik, B. XVI. Berlin, 1837. См. Приложения (стр. 245), где эта статья Симонова нами дается в переводе на русский язык.

в любом пункте поверхности земли. Сравнение вычисленных и наблюдаемых элементов магнитного поля Земли, произведенное Гауссом для 91 пункта, дало очень хорошие результаты.

Интересен отклик Гумбольдта на появление „Общей теории земного магнетизма“ в письме к Гауссу от 18 июня 1839 г.: „С тех пор как я начал заниматься земным магнетизмом, я всегда протестовал против увеличения числа магнитных полюсов и расщепления изогон и весьма интересовался измерениями напряженности. Я эмпирически узнал возрастание полной напряженности от магнитного экватора к магнитным полюсам... Я был против представления о малом магните, против «разогретой» и видоизмененной Био гипотезы Тобиаса Майера, против неуклюжих попыток Ханстина: я хотел золотого времени, когда ньютонианский дух освободил бы нас от оков нагромождающихся эпициклов и все элементы вывел бы из одного принципа. Это чудо сделали вы, мой дорогой, глубокоуважаемый друг, и мои глаза еще увидели это“.

В 1840 г. Гауссом и Вебером был опубликован „Атлас земного магнетизма“¹ (в виде дополнения к „Результатам“). Атлас содержит мировые карты распределения магнитного потенциала, распределения плотности фиктивной „магнитной жидкости“ на поверхности земли, карты элементов X , Y , Z , карты склонения, наклонения, горизонтальной напряженности, полной напряженности земного магнитного поля, а также объяснения к картам.

Для развития теории земного магнетизма Гауссу пришлось использовать некоторые известные теоремы и установить новые теоремы, относящиеся к свойствам потенциальной функ-

¹ Atlas des Erdmagnetismus nach den Elementen der Theorie entworfen. Supplement zu den Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins, unter Mitwirkung von C. W. B. Goldschmidt, herausgegeben von Carl Friedrich Gauss und Wilhelm Weber. Leipzig, 1840; Gauss Werke, B. XII.

ции. В связи с этим Гаусс в 1840 г. составил систематическое изложение теории потенциала под названием „Общие теоремы относительно сил притяжения и отталкивания, действующих обратно пропорционально квадрату расстояния“. Этот курс вошел в программу почти всех немецких университетов; чтение его в Геттингене было начато Гауссом.

Понятием потенциальной функции пользовались некоторые математики и до Гаусса. Уже Клеро в своем сочинении „Теория фигуры Земли...“ в 1743 г. показывает, что для уровенных поверхностей силы тяжести „выражение $Rdy + Qdx$ должно быть полным дифференциалом некоторой функции от x и y “.¹ (Под R и Q здесь подразумеваются проекции силы на оси y и x). Клеро говорит здесь по существу о потенциальной функции. Однако он не замечает, что частные производные этой функции по координатам представляют собой проекции силы на соответствующие оси; как известно, это было сделано позже Лагранжем в 1773 и 1777 гг.²

Свойства потенциальной функции для силы притяжения рассматривались Лапласом в его сочинениях; в 1782 г. он вывел известное уравнение, носящее его имя.³

Применение потенциальной функции (без использования еще этого термина) в магнитостатике было сделано Пуассоном в 1824 г.,⁴ когда он вычислял магнитное поле трехос-

¹ А. Клеро. Теория фигуры Земли, основанная на началах гидростатики. Под ред. Н. И. Идельсона. Изд. АН СССР, 1947, стр. 49.

² Lagrange. Sur l'équation séculaire de la lune. Oeuvres, 1773, t. VI, p. 349. Remarques générales sur le mouvement de plusieurs corps. Oeuvres, t. IV, p. 403, 1777.

³ Laplace. Théorie des attractions des sphéroides. Mémoires de l'Académie des sciences de Paris, 1785. Как сообщает П. Н. Кудрявцев в „Истории физики“ (Учпедгиз, 1948), это уравнение было получено раньше в гидродинамике Эйлером для некоторой функции, впоследствии названной потенциалом скоростей.

⁴ Poisson. Second Mémoire sur la théorie du magnétisme, p. 505. Mémoires de l'Académie des sciences. Années 1821 et 1822. Paris.

ного эллипсоида, однородно намагниченного по индукции земным полем.

Термин „потенциальная функция“ был применен впервые в труде Грина в 1828 г.;¹ термин „силовая функция“ был введен независимо от других ученых Гамильтоном в 1834 г.² при формулировании им начала варьирующего действия.

И. М. Симонов, выводя формулы для составляющих магнитного поля однородно намагниченной сферы в работе 1835 г., о которой будет сказано ниже, также пользовался потенциальной функцией.

Заслугой Гаусса явилась тщательная разработка теории потенциала и установление новых теорем. Излагая теорию потенциала, Гаусс употребил краткий термин „потенциал“ вместо „потенциальная функция“.

Гауссом выведена теорема о потенциале однородных тел: в статье „Теория притяжения однородных эллипсоидов“ (1813) он показал, что потенциал однородного тела на внешнюю точку может быть представлен в виде интеграла по поверхности, ограничивающей объем тела. В этой же статье приведены формулы, известные под названием интегралов Гаусса, дающие возможность вычислять телесный угол, под которым видна заданная поверхность из некоторого полюса; эти формулы применяются при вычислении потенциала двойного слоя постоянной плотности.

В работе „Общие теоремы относительно сил притяжения и отталкивания, действующих обратно пропорционально квадрату расстояния“ первые 18 параграфов (из общего числа 37) посвящены изложению известных свойств потенциала, установленных ранее другими авторами; в конце § 18 Гаусс говорит: „Изложенные до сих пор теоремы по своему существу не являются новыми, однако они должны

¹ Green. An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism. Nottingham, 1828. (Впоследствии перепечатано в журнале Крелля, т. XXXIX, XLVI, XLVII).

² См.: Philosophical Transactions, London, 1834, 1835.

быть приведены здесь ради связи, в качестве необходимой подготовки к последующим исследованиям, в которых будет развит ряд новых теорем". В § 20 Гаусс рассматривает одно из основных свойств потенциальной функции: значение потенциальной функции на поверхности некоторой сферы однозначно определяет значение этой функции в центре данной сферы (равное среднему арифметическому значению потенциала на поверхности сферы). В §§ 22, 23 Гаусс выводит известную теорему, названную его именем, о том, что поток вектора поля через замкнутую поверхность, охватывающую совокупность некоторых масс, равен произведению 4π на сумму всех масс.¹

Кроме того, Гаусс в своей работе (§§ 30—32) показал, что условием минимума энергии поля является такое распределение данной массы по данной поверхности, при котором на этой поверхности образуется уровенный слой, и что существует только одно единственное распределение масс, удовлетворяющее этому условию.

Гауссом поставлена, далее, важная проблема теории потенциала, имеющая большое практическое значение в геофизике, — задача Дирихле, в которой по известному распределению потенциала на заданной поверхности требуется определить значение потенциала внутри области, ограниченной данной поверхностью, и в бесконечной области внешней по отношению к данной поверхности.

Работой Гаусса по теории потенциала завершаются в основном его теоретические исследования в области земного магнетизма.

IV. Значение работ Гаусса по земному магнетизму

Появление трудов Гаусса по земному магнетизму разделило историю развития науки о земном магнетизме на две эпохи: „до Гаусса“ и „после Гаусса“.

¹ Формулировка теорем нами дается в современной терминологии

Деятельность Гаусса в области изучения земного магнетизма наложила глубокий отпечаток на дальнейшие исследования магнитного поля Земли и его изменений.

Развитием работ Магнитного союза в последующее время явились наблюдения как элементов земного поля, так и изменений этих элементов в полярных областях, организованные в течение 1882/83 г. (первый международный полярный год); наблюдения производились международными полярными экспедициями и, одновременно, магнитными обсерваториями. Программа наблюдений была утверждена на конференции в Петербурге в августе 1881 г.

В результате работ выяснилось, что периодический суточный ход элементов земного магнетизма является общим правилом; были выявлены характер суточного хода разных элементов и зависимость его от широты пункта, от времени года. Магнитная съемка полярных областей дала новый материал для составления карт.

Через 50 лет, в 1932/33 г., был организован второй международный полярный год; в этот период на широтах выше 55° работало 40 обсерваторий, 25 из которых были созданы в связи с полярным годом. СССР принимал активное участие в работах этого года, располагая в 1932/33 г. 18 обсерваториями, из которых 6 находились за полярным кругом.

Кроме магнитных наблюдений, на обсерваториях производились также визуальные наблюдения полярных сияний и фотограмметрические определения их высот, наблюдения над атмосферным электричеством и над распространением радиоволн.

Во всех странах в конце XIX в. и в текущем столетии были проведены общие магнитные съемки и построены магнитные карты; особенно большая работа по магнитной съемке произведена в СССР в период 1930—1935 гг.

Развитием идей Гаусса в области абсолютных магнитных измерений являются работы Института Карнеги в Вашинг-

тоне и работы Всесоюзного Научно-исследовательского института метрологии им. Д. И. Менделеева (ВНИИМ) в СССР. Работы Института Карнеги, начавшиеся в девятисотых годах, имели целью внести единообразие в измерения магнитного поля Земли, производившиеся различными странами на основе своих собственных абсолютных магнитных наблюдений. Сравнение абсолютных приборов различных стран, произведенное Институтом Карнеги в период 1910—1920 гг., показало расхождение в абсолютном значении горизонтальной составляющей, приведенной к Вашингтону (~ 0.18 эрстеда), достигающее 0.002 эрстеда. Поэтому Институт Карнеги предложил установить единый международный „стандарт“, понимаемый как среднее значение из всех определений горизонтальной составляющей, произведенных абсолютным методом Гаусса — Ламона и приведенных к Вашингтону. Однако это предложение не получило практического осуществления.

Всесоюзный Научно-исследовательский институт метрологии им. Д. И. Менделеева в 1931 г. предпринял работы по установлению эталона магнитных единиц как для области промышленных магнитных измерений, так и для области измерений магнитного поля Земли. Магнитная лаборатория ВНИИМ использовала абсолютный метод Гаусса для установления эталонов напряженности магнитного поля и магнитного потока. Эталоны осуществлены в виде магнитного теодолита, на котором имеются две катушки Гельмгольца. Напряженность поля этих катушек определяется сравнением с напряженностью горизонтальной составляющей магнитного поля Земли, измеряемой абсолютным методом Гаусса — Ламона на том же теодолите. Одна из катушек служит эталоном напряженности магнитного поля, а вторая в совокупности с третьей катушкой цилиндрической формы, имеющей однослойную намотку, — эталоном магнитного потока.

Погрешность воспроизведения напряженности поля и потока на таком магнитном теодолите не превышает $\pm 0.01\%$.

После появления гауссовской „Общей теории земного магнетизма“ коэффициенты в разложении магнитного потенциала Земли в ряд по шаровым функциям неоднократно определялись различными авторами по новым, более совершенным материалам с целью дальнейшего приближения к действительности.

Последние вычисления первых восьми гауссовых коэффициентов для эпохи 1945 г. произведены советским магнитологом В. И. Афанасьевой¹ по мировым геомагнитным картам, составленным в СССР Научно-исследовательским институтом земного магнетизма.

Укажем еще на выдающуюся работу профессора физики Московского университета Н. А. Умова (1904), который развивает теорию Гаусса и создает представление о „магнитных типах“.² Умов находит оси и моменты шаровых функций разных порядков, — иначе говоря, он создает геометрический образ потенциала Гаусса, что облегчает изучение изменения магнетизма Земли с течением времени. 24 коэффициента Гаусса сведены Умовым к 4 главным типам.

В сборнике, посвященном памяти Н. А. Умова, проф. Лейст писал: „Гаусс исходил из геометрического представления и составил потенциальную формулу с эмпирически определяемыми 24 коэффициентами. Умов, наоборот, составил комментарий к этим коэффициентам и перевел их опять в геометрический образ, но в совершенно новых плоскостях. Так дополняют

¹ В. И. Афанасьева. Сферический гармонический анализ геомагнитного поля эпохи 1945 г. Изв. АН СССР, серия географич. и геофизич., 1947, т. XI, № 1, стр. 55—60.

² См. две статьи Н. А. Умова: „Опыт исследования магнитных образов земного магнетизма“ (впервые напечатана в „Bulletin de la Société Imperiale de Naturalistes de Moscou“, 1902, стр. 1) и „Построение геометрического образа потенциала Гаусса как прием изыскания законов земного магнетизма“ (впервые напечатана в „Тр. Отд. физич. наук Московского общ. любителей естествозн., антропологии и этнографии“, т. 12, вып. 1, 1904). Эти статьи переизданы в книге: Н. А. Умов, Избр. соч., ГИТТЛ, 1950, стр. 227—370.

друг друга два гениальных мыслителя — Карл Фридрих Гаусс и Николай Алексеевич Умов“.

Теория земного магнетизма, созданная Гауссом, не может считаться физической теорией, объясняющей причины возникновения магнитного поля Земли, — она является только формальной математической теорией, дающей возможность вычислять магнитное поле Земли в удовлетворительном согласии с действительностью. Для науки о земном магнетизме важны следствия теории Гаусса: возможность разделения поля Земли на поле, созданное внутренними источниками, и поле, созданное внешними источниками, а также возможность выделения некоторого вихревого поля.

Следуя далее по пути Гаусса, Шустер¹ показал, как при помощи сферического гармонического анализа можно определить потенциал сил, вызывающих суточные вариации земного магнетизма; этот же метод применим и к вековым изменениям земного магнетизма.

Соответствующие работы в этой области в течение последнего десятилетия выполнены Н. П. Беньковой² и Ю. Д. Калининым.³

Мы не будем перечислять здесь довольно большое количество разнообразных теорий происхождения земного магнетизма, — ни одна из предложенных теорий не дает хорошего совпадения с действительностью.

¹ A. Schuster. The diurnal variation of terrestrial magnetism. Philosophical Transactions, London, v. 180 A, p. 467—512, 1889.

² Н. П. Бенькова. Спокойные солнечно-суточные вариации земного магнетизма. Гидрометеиздат, Л.—М., 1941.

³ Ю. Д. Калинин. Геомагнитные вековые вариации в СССР и внутреннее строение Земли. Гидрометеиздат, Л., 1946. Другие работы Ю. Д. Калинина посвящены вопросу выделения „нормального“ геомагнитного поля: это статья „Остаточное поле Бауэра“ (Информационный сборник по земному магнетизму и электричеству, № 5, вып. 1, Гидрометеиздат, Л.—М., 1940) и статья „Нормальное геомагнитное поле СССР“ (Тр. Н.-и. инст. земного магнетизма, вып. 2 (12), Гидрометеиздат, М.—Л., 1948).

Отметим только первую попытку лабораторной проверки гипотезы о связи земного магнетизма с вращением Земли — работу великого русского физика П. Н. Лебедева „Магнитометрическое исследование вращающихся тел. Сообщение первое“.¹

Лебедев впервые предпринял в 1910 г. лабораторный эксперимент с целью обнаружения магнитных явлений, вызываемых вращением тела. При этом Лебедев исходил из гипотезы Сузерлэнда о том, что заряды атомов под влиянием силы тяжести перемещены по направлению земного радиуса так, что „центры отрицательных зарядов описывают *бóльшие* пути, чем центры положительных“, и что „магнитное поле является результатом *разности* конвекционных действий отрицательных и положительных зарядов вращающейся материи“. Кроме того, Лебедевым была выдвинута гипотеза центробежного сдвига зарядов атомов. Обе гипотезы приводили к таким значениям магнитного поля вращающегося тела, которые легко могли быть измерены в лаборатории. Однако эти опыты П. Н. Лебедева не дали ожидаемых результатов.

В заключение своей работы П. Н. Лебедев писал: „Указанными двумя гипотезами далеко не исчерпывается возможная связь движения материи с образованием магнитных полей, которую мы наблюдаем в случае солнечных пятен и явлений нормального геомагнетизма. Другие гипотезы, которые могут быть сделаны относительно этой связи и которые достаточны для объяснения магнитных сил очень больших двигающихся масс, заставляют ожидать, что при условиях и размерах описанных выше опытов могут возникнуть только очень слабые магнитные поля, которые не могут быть обнаружены магнитометрически; для проверки этих гипотез самую схему опытов надо изменить, чтобы получить

¹ Журн. Русск. физ.-хим. общ., 1911, т. XLIII, Часть физическая, вып. 9, стр. 484—496; или: П. Н. Лебедев, Избр. соч. М., 1949, стр. 229—242.

достаточную чувствительность измерений, во много раз бóльшую той, которой можно было пользоваться в описанных выше предварительных исследованиях“.

Эта мысль Лебедева была повторена в теоретических исследованиях английского физика Блекэта,¹ предположившего, что всякое вращающееся тело должно обладать магнитным моментом, пропорциональным моменту количества движения и корню квадратному из постоянной тяготения. По этой гипотезе магнитные моменты вращающихся тел в лабораторных условиях должны иметь величину, не поддающуюся измерению.

Гипотеза Блекэта, основанная на казавшемся достоверным факте постоянства отношения магнитного момента и момента количества движения у трех небесных тел — Земли, Солнца и звезды № 78 в созвездии Девы — в настоящее время подвергается сомнению ввиду того, что наблюдения последних лет показали отсутствие магнитного поля на Солнце. Поэтому задача создания удовлетворительной физической теории земного магнетизма до сих пор продолжает оставаться неразрешенной...

Учение о потенциале как в теории тяготения, так и в теории магнитостатики и электростатики получило широкое распространение после опубликования работы Гаусса „Общие теоремы относительно сил притяжения и отталкивания, действующих обратно пропорционально квадрату расстояния“.

Теоремы, изложенные Гауссом в его работе, получили дальнейшее развитие в исследованиях многих крупнейших математиков XIX и XX вв. (Пуанкаре, Шварц, Стеклов, Ляпунов и другие). В частности, А. М. Ляпунов дал строгое доказательство теорем о потенциале двойного и простого слоя, рассмотрев необходимые и достаточные условия суще-

¹ См.: Nature, May, 17, 1947, v. 159, № 4046, pp. 658—666, а также: Blackett P.S.M. The magnetic field of massive rotating bodies. Phil. Mag., 40, № 301, pp. 125—150, 1949.

ствования нормальных производных потенциала на поверхности, ограничивающей область, внутри которой требуется найти распределение потенциала.¹

В настоящее время теория потенциала широко используется в прикладной магнитометрии для вычисления магнитных полей тел различной формы; кроме того, по известному распределению аномального поля на поверхности земли, теория потенциала позволяет, при некоторых дополнительных предположениях, устанавливать глубину источников, вызывающих аномалии.

Т. Н. Розе.

¹ А. М. Ляпунов. Работы по теории потенциала. (О некоторых вопросах, относящихся к проблеме Дирихле). М.—Л., 1949, ГТТИ, стр. 70—138. Впервые напечатано на французском языке в „Journal de Mathématique“ (5 série IV, 1898, pp. 241—311). О работах А. М. Ляпунова см.: Gunther. Théorie du Potentiel. Paris, 1934 и А. Н. Сретенский. Теория Ньютоновского потенциала. ОГИЗ — Гостехиздат, 1946.

КОММЕНТАРИИ

К отчету и работе „Интенсивность земной магнитной силы, приведенная к абсолютной мере“

Отчет о работе „Интенсивность земной магнитной силы, приведенная к абсолютной мере“ представляет собой краткое изложение работы на ту же тему, публикуемой на стр. 25—75. Отчет был опубликован Гауссом в „Göttinger gelehrte Anzeigen“ 24 декабря 1832 г. и в журнале „Astronomische Nachrichten“, издававшемся Шумахером в Альтоне (X, 1833, col. 349—360); он перепечатан также в V т. Полн. собр. соч. Гаусса, изданного Геттингенским научным обществом в 1867 г. (стр. 293—304).

Этому сообщению в Геттингенских ученых ведомостях предшествовали слова: „В заседании Королевского общества 15 декабря придворный советник Гаусс сделал сообщение «*Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata*», о содержании которого здесь дается отчет“.

Сама работа Гаусса „Интенсивность земной магнитной силы, приведенная к абсолютной мере“ впервые была опубликована в „*Compendationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores*“ (v. VIII, 1841), затем в V т. Полн. собр. соч. Гаусса (стр. 81—118), позднее — в издании „*Ostwald's Klassiker*“, № 53, herausgegeben von E. Dorn. Leipzig, 1894. См. также: *Poggend. Annalen*, XVIII, 1833, SS. 241—273, 591—614; *Annales de Chimie*, LVII, 1834, pp. 5—69; *Effemeridi Astronomiche di Milano*, 1838, pp. 3—132 (Supplement).

1 (стр. 9). Гаусс подразумевает здесь уменьшение горизонтальной составляющей геомагнитного поля от магнитного экватора Земли к ее магнитным полюсам.

2 (стр. 11). „Статический момент элементов свободного магнетизма стрелки“ — по современной терминологии, магнитный момент стрелки.

3 (стр. 15). Парижский фут равен 32.484 см. Прусский фунт (до 1850 г.) равен 467.714 г.

4 (стр. 18). При наблюдении углов отклонения магнитной стрелки под действием постоянного магнита Гаусс не определял так называемых коэффициентов распределения p и q , от которых зависит величина угла отклонения, и поэтому располагал отклоняющий магнит на столь большом расстоянии от стрелки, чтобы можно было пренебречь величинами $\frac{p}{R^2}$ и $\frac{q}{R^4}$ по сравнению с единицей.¹ Стремясь к тому, чтобы постоянные магниты, предназначенные для магнитных наблюдений, обладали бы значительным магнитным моментом, Гаусс пользовался большими магнитами, вес которых составлял обычно около 400 г и иногда достигал 1 кг. Материалом магнитов являлась закаленная сталь. Данные § 23 позволяют произвести расчет интенсивности остаточного намагничивания I_r магнита № 1, использованного Гауссом для определения горизонтальной составляющей: I_r составляет около 180 cgs. Современные же специальные сплавы для постоянных магнитов имеют I_r до 1000 cgs. Такое высокое значение I_r позволяет уменьшать размеры магнитов, сохраняя их магнитный момент, и подвешивать магниты на более тонких нитях, благодаря чему сильно уменьшается поправка на кручение нити; кроме того, аппаратура для магнитных измерений становится гораздо менее громоздкой.

Необходимо еще заметить, что современный метод определения углов отклонения, учитывающий вышеупомянутые коэффициенты p и q , позволяет выбирать относительно меньшие расстояния между отклоняющим магнитом и стрелкой и, следовательно, позволяет использовать постоянные магниты с меньшим значением магнитного момента.

5 (стр. 20). 1 лот = 12.7975 г.

6 (стр. 25). Третий элемент, определяющий „земную магнитную силу“, Гаусс называет интенсивностью. Мы сохраняем этот термин в тех случаях, когда речь идет об интенсивности (величине) силы, но вместо выражения Гаусса „интенсивность земного магнетизма“ мы пользуемся выражением „напряженность земного магнетизма“.

7 (стр. 25). Гаусс говорит здесь об увеличении полной напряженности геомагнитного поля при продвижении от магнитного экватора к полюсу.

8 (стр. 26). Под „магнитной силой стрелки“ понимается ее магнитный момент.

¹ О коэффициентах p и q , зависящих от распределения магнитных масс магнита, см.: Н. В. Розе, Н. Н. Трубытчинский, Б. М. Яновский. Земной магнетизм и магнитная разведка. ОНТИ, 1934, стр. 82.

9 (стр. 28). Под „действием“ стрелки понимается напряженность магнитного поля, создаваемого стрелкой. Как показывает Гаусс дальше, напряженность поля стрелки, умноженная на куб расстояния, „при непрерывном увеличении расстояний и сохранении прочих условий приближается асимптотически к некоторому предельному значению“, являющемуся не чем иным, как магнитным моментом данной стрелки. Утверждение Гаусса, что „это предельное значение будет однородно с действием земной магнитной силы и может быть сравниваемо с ним“, нельзя понимать в том смысле, что магнитный момент стрелки сравнивается с напряженностью геомагнитного поля, — это не имело бы смысла; очевидно, Гаусс подразумевает здесь сравнение напряженности поля, созданного стрелкой, с напряженностью геомагнитного поля.

10 (стр. 37). Под моментом свободного магнетизма Гаусс понимает магнитный момент стрелки — вектор $\bar{M}$, определяемый как интеграл $\int \bar{r} dm$, где $\bar{r}$ — радиус-вектор элементарной магнитной массы относительно некоторого неподвижного центра, dm — элементарная магнитная масса; интеграл берется по всем частицам магнита. Проекции вектора $\bar{M}$ на декартовы оси суть:

$$\begin{aligned} X &= M \cos \alpha = \int x dm, \\ Y &= M \cos \beta = \int y dm, \\ Z &= M \cos \gamma = \int z dm, \end{aligned}$$

где α, β, γ — углы, составляемые вектором $\bar{M}$ с осями координат.

Проекция вектора $\bar{M}$ на ось, направление которой задается углами A, B, C и которая образует угол ω с вектором $\bar{M}$, равна

$$M \cos \omega = X \cos A + Y \cos B + Z \cos C = M (\cos \alpha \cos A + \cos \beta \cos B + \cos \gamma \cos C).$$

11 (стр. 38). Если $\bar{P}$ — напряженность внешнего однородного маг-

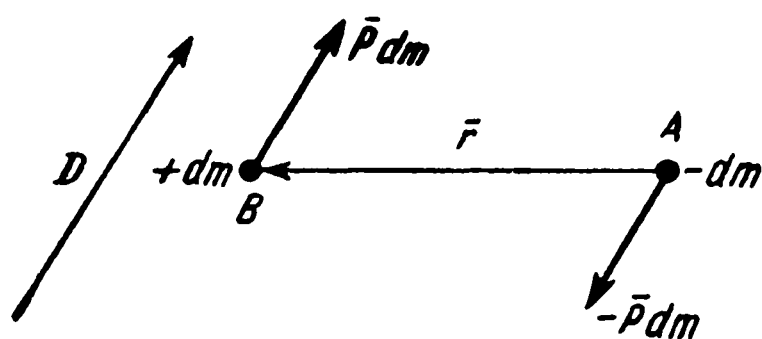


Рис. 1.

нитного поля, то $\bar{P} dm$ — сила, действующая на магнитную массу $+dm$, и $-\bar{P} dm$ — сила, действующая на магнитную массу $-dm$.

Величина магнитного момента схематического магнита, изображенного на рис. 1, $M = r dm$; от-

сюда $\frac{M}{r} = dm$. Поэтому сила $P dm$ эквивалентна силе $\frac{PM}{r}$.

Вектор момента пары сил, указанной на рис. 1, определяется векторным произведением $\bar{r} \times \bar{P} dm = \bar{M} \times \bar{P}$.

Таким образом, в этом параграфе Гаусс показывает, что силы, действующие на элементарные магнитные массы постоянного магнита в однородном магнитном поле, приводятся к паре с моментом $\bar{M} \times \bar{P}$, т. е. магнитная стрелка, помещенная в однородное магнитное поле, будет испытывать вращающий момент, величина которого будет равна произведению магнитного момента стрелки на напряженность поля и на синус угла между направлением магнитного момента стрелки и направлением поля.

12 (стр. 39). Вращающий момент, испытываемый магнитом под действием вертикальной составляющей T' земного магнитного поля, т. е. произведение $T'M$, где M — магнитный момент магнита, Гаусс представляет как момент такой пары, силы которой равны весу магнита, т. е. $T'dm = p$. Плечо этой пары находится как $r' = \frac{MT'}{T'dm} = \frac{MT'}{p}$. (Магнитные массы dm , конечно, не следует понимать как магнитные массы полюсов магнита). Тогда, если центр тяжести магнита NS находится в точке A' , то, прикладывая такую пару сил, как это показано на рис. 2, а, мы приводим силу p и пару с моментом MT' к одной силе, приложенной в точке B' и равной $T'dm$, т. е. весу тела. Таким образом, центр тяжести магнита оказывается „смещенным“ на расстояние $r' = \frac{MT'}{p}$ в сторону северного полюса магнита, если вертикальная составляющая земного поля направлена вниз.

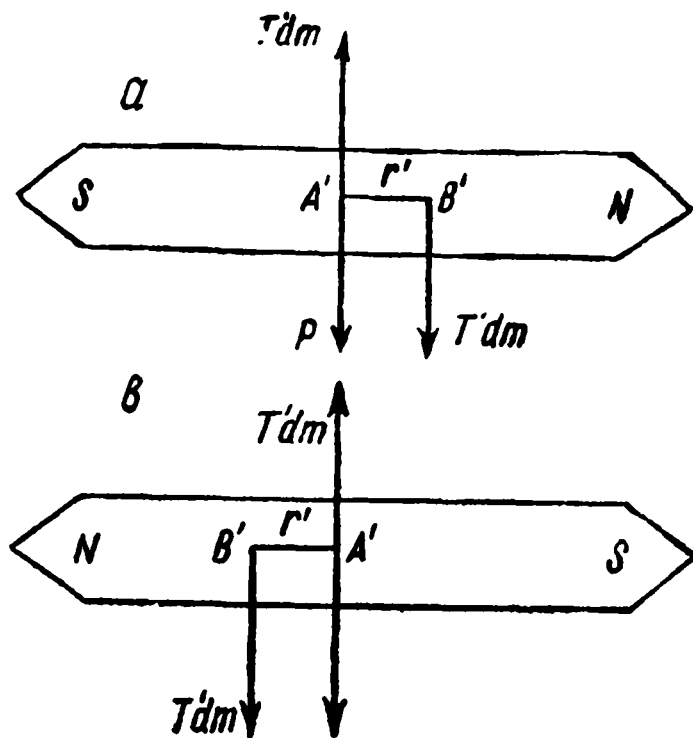


Рис. 2.

При перемагничивании магнита (до насыщения, чтобы не изменился его магнитный момент) его центр тяжести „смещается“ в противоположную сторону на такое же расстояние r' , как это ясно из рис. 2, в.

13 (стр. 41). Для равновесия твердого тела, закрепленного в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы геометрическая сумма моментов сил, приложенных к телу, равнялась нулю:

$$(\bar{M} \times \bar{P}) + (\bar{r} \times \bar{m}g) = 0.$$

Здесь $\bar{r}$ — радиус-вектор центра тяжести тела относительно неподвижной точки, $\bar{m}g$ — сила тяжести тела.

Возьмем начало декартовых осей в неподвижной точке C ; ось x направим по магнитному меридиану к северу, ось y — к востоку; ось z — вертикально вниз. Обозначим проекции напряженности $\bar{P}$ геомаг-

нитного поля на оси x, y, z через P_x, P_y, P_z ; проекции магнитного момента тела M — через M_x, M_y, M_z .

Проектируя векторное уравнение равновесия на оси, получим:

$$M_y P_z - M_z P_y + mgy = 0,$$

$$M_z P_x - M_x P_z - mgx = 0,$$

$$M_x P_y - M_y P_x = 0.$$

В обозначениях Гаусса $P_x = T$ и $P_z = T'$, $P_y = 0$, т. к. ось x направлена по магнитному меридиану.

Как ясно из рис. 3, проекции $\bar{M}$ будут:

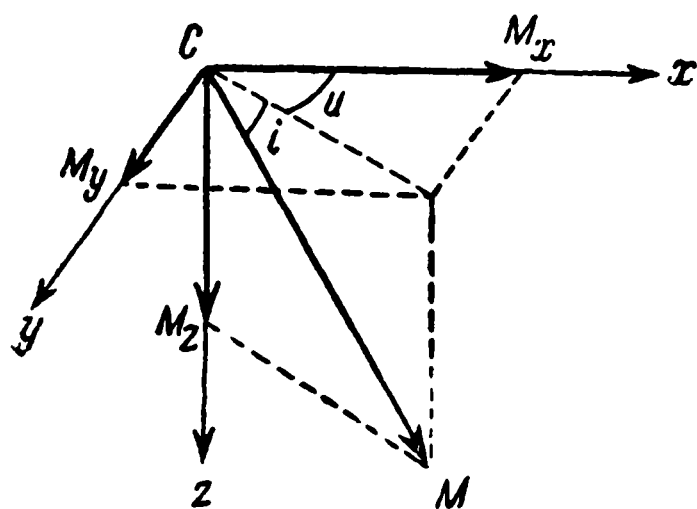


Рис. 3.

$$M_x = M \cos i \cos u,$$

$$M_y = M \cos i \sin u,$$

$$M_z = M \sin i.$$

Таким образом, уравнения равновесия принимают следующую форму:

$$MT' \cos i \sin u + mgy = 0,$$

$$MT \sin i - MT' \cos i \cos u - mgx = 0,$$

$$MT \cos i \sin u = 0.$$

Из уравнения равновесия относительно оси z следует, что $u = 0$; в таком случае, как это видно из первого уравнения, координата y центра тяжести также равна нулю, т. е. при равновесии магнита плоскость, проведенная через точку C , центр тяжести и через магнитную ось, совпадает с магнитным меридианом.

Из второго уравнения равновесия (относительно оси y) получаем:

$$MT \sin i - MT' \cos i - mgx = 0.$$

Отсюда $mgx + MT' \cos i = MT \sin i$.

Но согласно представлению Гаусса, изложенному в § 6, действие вертикальной составляющей T' сводится к смещению центра тяжести магнита в направлении магнитной оси на расстояние $r' = \frac{MT'}{mg}$; следовательно, слагаемое $MT' \cos i = mgr' \cos i$, и предыдущее уравнение принимает вид

$$mg(x + r' \cos i) = MT \sin i,$$

что и разъясняет необходимость условия, указанного Гауссом, чтобы „ $TM \sin i$ равнялось произведению веса тела на расстояние смещенного положения B' центра тяжести до отвесной линии, проведенной через точку C “.

Если вращающий момент вокруг оси z не равен нулю, то вокруг этой оси будут происходить колебания магнита, дифференциальное уравнение которых будет

$$K \frac{d^2 u}{dt^2} = -MT \cos i \sin u.$$

Здесь K — момент инерции магнита относительно оси z . Полупериод малых колебаний будет равен

$$\pi \sqrt{\frac{K}{MT \cos i}}.$$

14 (стр. 42). Момент силы кручения равен $(v - u)\theta$, где θ — коэффициент кручения.

Как известно, $\theta = \frac{\pi G d^4}{32l}$, где G — модуль сдвига материала нити, d — диаметр нити, l — ее длина.

15 (стр. 44). Это соотношение легко получим, если положим $v = 0$ и, кроме того, $u^0 = 0$. Составим дифференциальное уравнение движения магнита с учетом момента кручения нити:

$$K \frac{d^2 u}{dt^2} = -MT \sin u - \theta u.$$

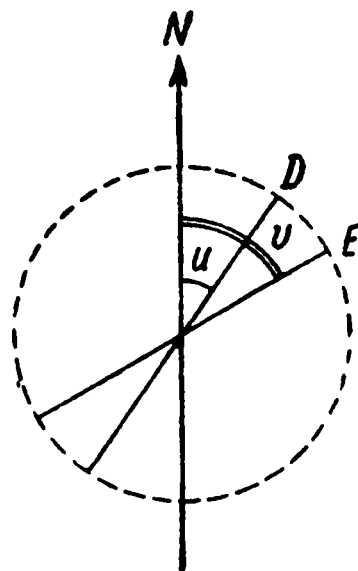


Рис. 4.

Отсюда следует, что период малых колебаний будет $2\pi \sqrt{\frac{K}{MT + \theta}}$.

Без учета кручения нити период равен $2\pi \sqrt{\frac{K}{MH}}$; таким образом, кру-

чение нити уменьшает период малых колебаний в отношении $\sqrt{\frac{n}{n+1}}$,

где $n = \frac{TM}{\theta}$.

16 (стр. 50). Необходимо заметить, что Гаусс нигде не пытается оценить погрешность абсолютного измерения горизонтальной составляющей, исходя из реальных погрешностей определения отдельных физических величин (периода колебаний магнита, момента инерции магнита с подвесом, угла отклонения магнитной стрелки, расстояния между магнитами и т. д.). Гаусс ограничивается только терминами „наивысшая точность“ (§ 10), „микроскопическая точность“ для измерения расстояний и не указывает, какую именно точность он считает наивысшей и микроскопической. Отсутствие оценки погрешности измерений отдельных физических величин приводит к тому, что, например, периоды колебания

магнитов указываются с заведомо излишним числом знаков (до $1 \cdot 10^{-5}$ сек. при величине периода около 20 сек., т. е. с относительной погрешностью около $0.5 \cdot 10^{-4} \%$), величина момента инерции (§ 11, стр. 50) указана с совершенно неправдоподобной точностью порядка $1 \cdot 10^{-6} \%$; необходимо указать здесь, что современные методы измерений позволяют определять момент инерции магнита с подвесом с погрешностью до тысячных долей процента, т. е. с погрешностью в 1000 раз большей, чем у Гаусса.

17 (стр. 51). В последней фразе § 11 говорится о моменте, с которым земной магнетизм стремится вращать испытуемый магнит вокруг вертикальной оси, хотя Гаусс и употребляет выражение „сила“, а не момент.

18 (стр. 52). Принцип виртуальных перемещений приводится здесь Гауссом в несколько необычной форме. Гаусс говорит, что система материальных точек находится в равновесии, если сумма произведений каждой силы на проекцию бесконечно малого перемещения точки ее приложения на направление силы положительна для неvirtуального перемещения системы и равна нулю для ее виртуального перемещения.

Это утверждение, очевидно, следует понимать так, что если бы все отдельные материальные точки системы, находящейся в равновесии, переместились бы таким образом, что проекции элементарных перемещений всех точек на направление сил были бы положительными, то в этом случае работа приложенных сил была бы положительной; однако такое воображаемое перемещение системы не было бы виртуальным, так как оно не могло бы, очевидно, удовлетворить связям, наложенным на систему. Для виртуального же перемещения системы, находящейся в равновесии, работа приложенных сил должна равняться нулю.

19 (стр. 55). Для того чтобы вывести формулы для координат элементарных магнитных масс e и E , обратимся к рис. 5.

Начало декартовых осей взято в точке h первого магнита; ось x направлена по магнитному меридиану к северу, ось y — к востоку, ось z на рисунке не показана. Оси, скрепленные с первым магнитом, обозначены через x', y', z' ; оси, скрепленные со вторым магнитом, — через x'', y'', z'' .

Разложим радиус-вектор $h\bar{e}$ элемента e по ортам осей x', y', z' :

$$h\bar{e} = a\bar{i}' + b\bar{j}' + c\bar{k}'.$$

Проектируя $h\bar{e}$ на оси x, y, z , получаем координаты элемента e :

$$\begin{aligned} x &= a \cos u - b \sin u, \\ y &= a \sin u + b \cos u, \\ z &= c, \end{aligned}$$

где u — угол между магнитной осью первого магнита и магнитным меридианом.

Разложим далее по ортам осей x'', y'', z'' относительный радиус-вектор элемента E : $\overline{HE} = A\overline{i''} + B\overline{j''} + C\overline{k''}$.

Проектируя геометрическую сумму $h\overline{h'} + h'\overline{H} + \overline{HE}$ на декартовы оси x, y, z , получаем координаты элемента E :

$$X = \alpha + R \cos \psi + A \cos U - B \sin U,$$

$$Y = \beta + R \sin \psi + A \sin U + B \cos U,$$

$$Z = C.$$

Смысл обозначений $\alpha, \beta, U, R, \psi$ ясен из рисунка.

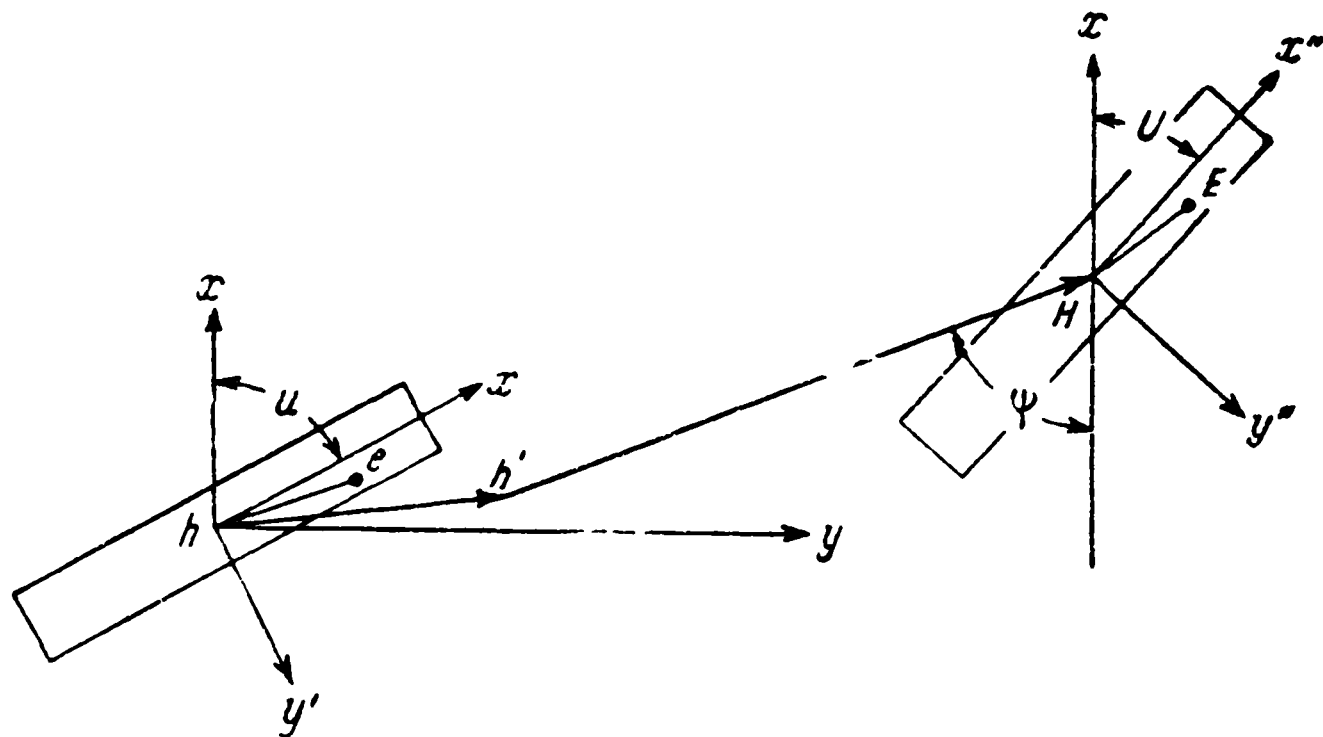


Рис. 5.

20 (стр. 55). Соотношение $r^2 = (R + k)^2 + l$, где r является расстоянием между произвольными элементарными магнитными массами взаимодействующих магнитов, получаем, вычисляя r^2 по формуле $r^2 = (X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2$ и используя выражения координат элементарных масс, приведенные в предыдущем параграфе.

21 (стр. 58). В этом параграфе Гауссом рассматривается вопрос о взаимодействии двух магнитов, расположенных любым образом в одной плоскости. Позднее вопрос о взаимодействии двух магнитов, расположенных как угодно, был исчерпывающе разрешен А. Шмидтом в его двух работах: „Über die Bestimmung des allgemeinen Potentials beliebiger Magnete und die darauf begründete Berechnung ihrer gegenseitigen Einwirkung“ (Sitzgsber. Berl. Acad. Wiss. Mathem. Physik K. 1, 16, 306—322, Berlin, 1907) и „Über die gegenseitige Einwirkung zweier Magnete in beliebiger Lage“ (Terr. Magn. 17, 181—322; 18, 65—70, Washington, 1912, 19, 3). См. также статью А. Случановского „Взаимный потенциал двух произвольных магнитов и его выражение в виде функции от

шести параметров, характеризующих расположение обоих тел" (Тр. Гл. геофиз. обсерватории, вып. 11, стр. 67—81, Центр. упр. единой гидрометеорологич. службы СССР, 1936).

22 (стр. 62). В настоящее время наблюдение углов отклонения магнитной стрелки под действием отклоняющего магнита производится не по методу Гаусса, описанному в этом параграфе, а по методу Ламона, который обеспечивает более высокую точность измерений.

На рис. 6 показаны положения магнитов по Гауссу и по Ламону. Подвижный магнит ns подвешивается на нити, а отклоняющий магнит NS

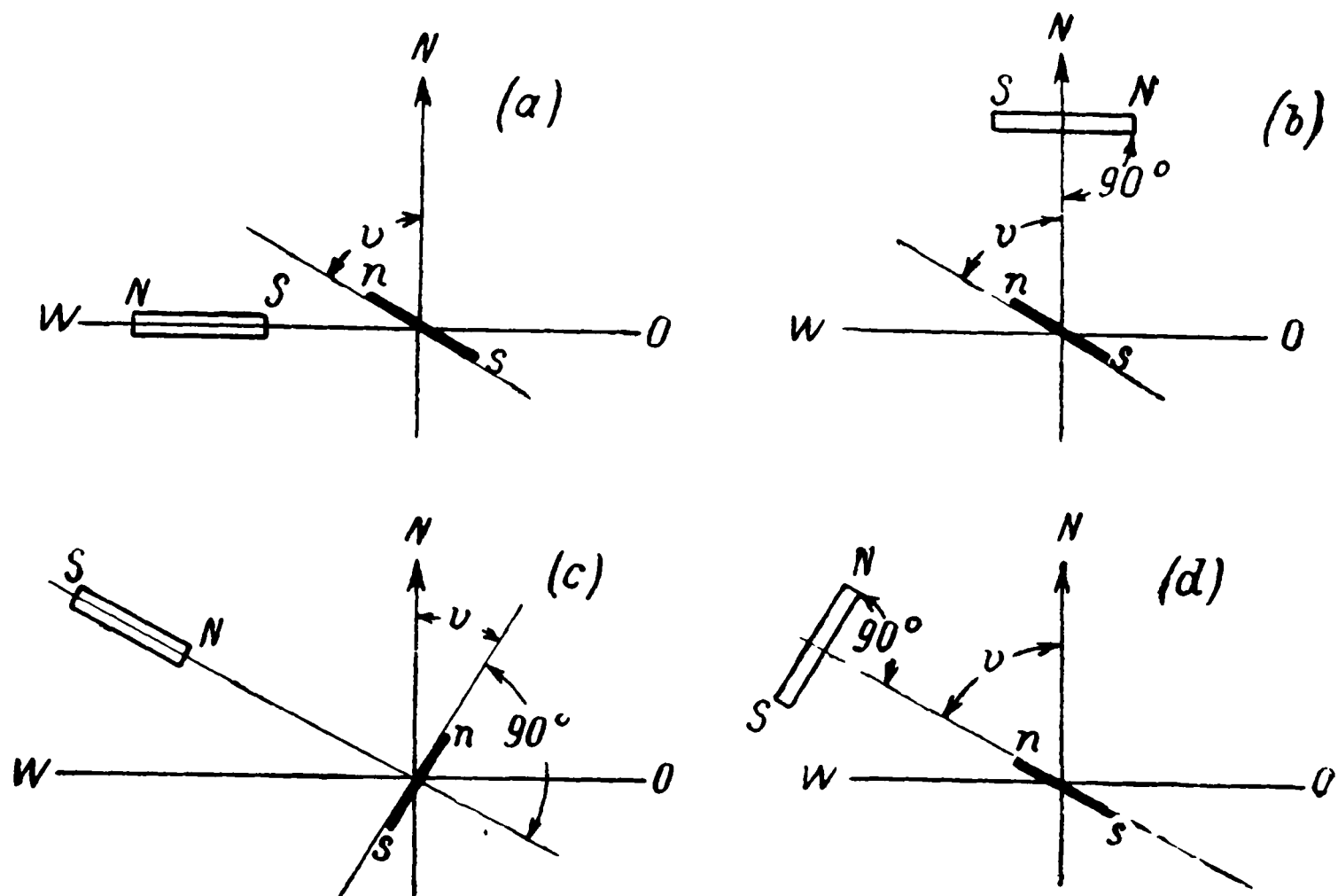


Рис. 6.

a — первое гауссово положение магнитов; b — второе гауссово положение; c — первое ламоново положение; d — второе ламоново положение.

устанавливается на шине; V — угол отклонения подвижного магнита от магнитного меридиана.

23 (стр. 66). Понижение точности в определении T при увеличении числа поправочных членов степени R^{-7} и выше объясняется тем, что коэффициенты при R^{-n} определяются с большой погрешностью, причем погрешность быстро возрастает с увеличением n . Так, например, для членов R^{-5} погрешность определения коэффициента p порядка нескольких процентов, тогда как для члена R^{-7} она возрастает до нескольких десятков процентов.

24 (стр. 70). При определении величины TM и $\frac{M}{T}$ Гаусс вводил следующие поправки: 1) на изменение горизонтальной составляющей во время наблюдений как периода колебаний магнита, так и угла отклонения стрелки под действием магнита; 2) на кручение нити подвеса; 3) на амплитуду колебания магнита; 4) на суточный ход хронометра. Изменение температуры Гауссом во внимание не принималось, не учитывалось также и индукционное действие горизонтальной составляющей на колеблющийся магнит.

Если учесть все эти поправки и принять во внимание, что при современном способе измерений отклоняющий магнит помещается в первом ламоновом положении, то окончательные формулы для горизонтальной составляющей H (у Гаусса принято обозначение T) и магнитного момента M магнита примут следующий вид:¹

$$H_0 = \frac{1}{T} \sqrt{\frac{2K_{20} \left(1 + \frac{P}{R^2}\right)}{R_{20}^3 \sin \theta}} \left[1 + \frac{\mu}{2} (t - \tau) + \sigma (t - 20^\circ) - \frac{3}{2} \beta (\tau - 20^\circ) - \frac{\nu H}{2} (1 + \sin \theta) - \frac{a}{2} \Delta - bs + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} \frac{\Delta H}{H} \right];$$

$$M_{20} = \frac{1}{T} \sqrt{\frac{K_{20} R_{20}^3 \sin \theta}{2 \left(1 + \frac{P}{R^2}\right)}} \left[1 + \mu \left(\frac{t + \tau}{2} - 20^\circ \right) + \sigma (t - 20^\circ) + \frac{3}{2} \beta (\tau - 20^\circ) - \frac{\nu H}{2} (1 - \sin \theta) - \frac{a}{2} \Delta - bs + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} \frac{\Delta H}{H} \right].$$

Здесь H_0 — значение H в средний момент времени наблюдения периода колебаний магнита;

M_{20} — значение M при нормальной температуре 20° и в отсутствие внешнего магнитного поля;

T — полупериод колебания магнита, измеренный по хронометру;

K_{20} — момент инерции магнита вместе с подвесом при нормальной температуре 20° ;

R_{20} — расстояние между центрами подвешенного и отклоняющего магнита, установленного на шине магнитометра при нормальной температуре 20° ;

θ — угол отклонения подвешенного магнита;

p — постоянный „коэффициент распределения“ магнита;

μ — температурный коэффициент магнитного момента;

¹ Вывод этих формул см.: Б. М. Яновский. Земной магнетизм. Изд. Главсевморпути, М.—Л., 1941.

- t — температура во время наблюдений колебаний магнита;
 τ — температура при наблюдениях угла отклонения;
 σ — коэффициент линейного расширения магнита;
 β — коэффициент линейного расширения материала шин;
 ν — индукционный коэффициент магнита;
 $a\Delta$ — поправка на кручение нити;
 b — коэффициент, равный $\frac{1}{24 \cdot 60 \cdot 60}$;
 s — суточный ход хронометра;
 α — амплитуда колебаний магнита;
 ΔH — вариация H .

Гаусс приводит здесь значение горизонтальной составляющей 18 сентября, равное 1.782088, если за основные единицы выбраны мг, мм и сек. В системе cgs это значение H составит 0.1782088; здесь Гауссом даны по крайней мере три лишние значущих цифры. Минимальная абсолютная погрешность определения H по методу Гаусса—Ламона с помощью современных приборов составляет несколько сотысячных единицы cgs.

25 (стр. 72). См. сказанное в примечании [4] относительно использования тяжелых магнитов.

26 (стр. 74). 1 парижская линия = $\frac{1}{120}$ парижского фута = 0.2707 см;
 1 берлинский фунт = 467.7114 г.

27 (стр. 74). В § 26 Гаусс дает обоснование системы единиц, получившей впоследствии название абсолютной. Здесь Гаусс впервые установил, что при измерении магнитных величин нет необходимости устанавливать для них особые произвольно выбранные единицы, а достаточно установить единицы длины, массы и времени, чтобы единица напряженности магнитного поля получилась вполне определенной. Эта идея Гаусса была впоследствии распространена Вебером и на электрические единицы. Однако долгое время система единиц, предложенная Гауссом, не нашла общего признания и лишь в 1881 г. на Международном Электрическом съезде в Париже эта система была узаконена постановлением о рекомендации пользоваться ею при всех электрических и магнитных измерениях. При этом интересно отметить, что введению абсолютной системы единиц предшествовала работа комиссии в составе крупнейших физиков середины девятнадцатого столетия, куда входили Якоби, Максвелл, Кольрауш, Сименс, Томсон. Комиссия подвергла пересмотру предложение Гаусса, но ничего не могла противопоставить ему и ограничилась лишь изменением основных единиц; так, за единицу длины предложила принять не миллиметр, а сантиметр, а за единицу массы вместо миллиграмма — грамм.

К работе „Общая теория земного магнетизма“

„Общая теория земного магнетизма“ впервые была опубликована Гауссом в ежегоднике „Resultate aus den Beobachtung des magnetischen Vereins, 1838“ (Göttingen, 1839. SS. 1—57, 146—148); затем в V т. „Gauss Werke“ (1867, SS. 119—193). См. также: Scientific Memoirs, selected from the Transactions of Foreign Academies and Learned Societies and from Foreign Journals, by R. Taylor, J. Tyndall and W. Francis (London, III, 1843, pp. 153—196).

1 (стр. 79). В настоящее время установлено, что горизонтальная составляющая магнитного поля Земли, о которой говорит здесь Гаусс, подвержена вековым изменениям так же, как магнитное склонение и наклонение.

2 (стр. 83). Кроме гипотез о существовании одного или нескольких магнитных диполей, о которых говорит здесь Гаусс, в 1835 г. профессор Казанского университета И. М. Симоновым была предложена гипотеза об однородном намагничении земной сферы. См. в приложении статью Симонова „О земном магнетизме“.

3 (стр. 83). Как показывает математический анализ, суточный ход магнитных элементов обусловлен как внешними, так и внутренними причинами. Внешними источниками поля вариаций являются замкнутые электрические токи в ионосфере; эта система токов перемещается с востока на запад со скоростью суточного вращения Земли. Возникновение таких токов объясняется различными гипотезами.

Внутренними источниками поля вариаций являются индукционные токи, возникающие в земной коре под действием внешних токов в ионосфере. Магнитные же бури, как теперь установлено, связаны с солнечной деятельностью.

4 (стр. 89). Расположение векторов полной напряженности $\vec{\psi}$, горизонтальной составляющей $\vec{\omega}$ и элемента ds некоторой линии, лежащего в плоскости касательной к земной поверхности в точке P , показано на рис. 1.

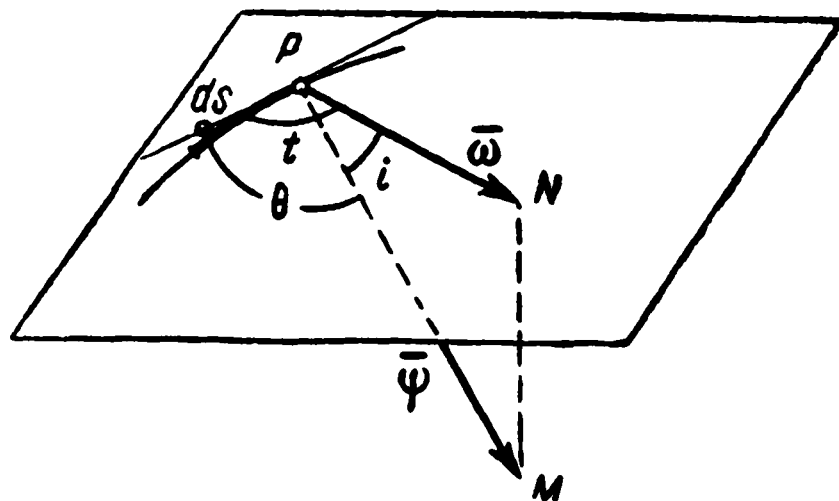


Рис. 1.

5 (стр. 90). Рис. 2 поясняет расположение вектора $\vec{\omega}$ и углов δ' и (1.0) в точке P' полигона.

6 (стр. 91). Значения горизонтальной составляющей ω геомагнитного поля указаны Гауссом в произвольных единицах; для перехода к эрстедам эти значения нужно умножить на 0.00034941.

7 (стр. 92). Вычисление интеграла горизонтальной составляющей по замкнутому контуру на поверхности земли неоднократно производилось и после Гаусса с целью проверки потенциальности магнитного поля Земли. Если кроме потенциального поля имеется еще вихревое, то $\oint \omega \cos t \, dl = 4\pi i$, где i — сила атмосферного вертикального тока.

Вычисления Шмидта для эпохи 1885 г. показали, что в области экватора ток плотностью $0.2 \frac{A}{\text{км}^2}$ направлен к Земле, а в полярных областях ток плотностью $0.08 \frac{A}{\text{км}^2}$ направлен от Земли.

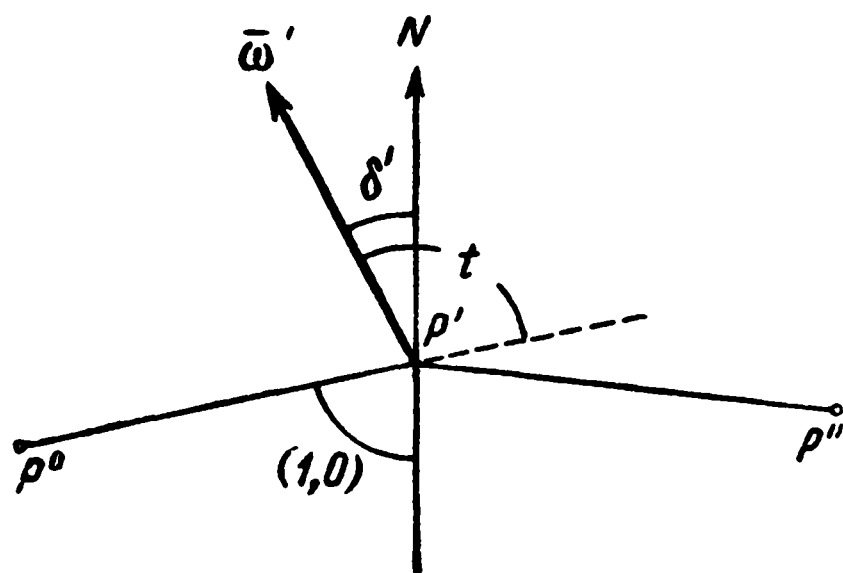


Рис. 2.

Для этой же эпохи 1885 г. Бауэр составил интеграл $\oint \omega \cos t \, dl$ для кругов параллелей и получил для области между 45° N и 45° S плотность тока около $0.04 \frac{A}{\text{км}^2}$; здесь ток направлен, в среднем, к Земле. В области же между 45° N и 50° N , по данным Бауэра, ток направлен вверх и плотность тока составляет $\sim 0.09 \frac{A}{\text{км}^2}$. Фактически же плот-

ность вертикальных токов в атмосфере имеет порядок $2 \cdot 10^{-6} \frac{A}{\text{км}^2}$.

Последние же исследования показывают, что значения плотностей токов, полученных Шмидтом и Бауэром, могут быть объяснены неточностью построения магнитных карт, и все земное магнитное поле следует считать потенциальным.

8 (стр. 98). Гаусс предполагал, что на Земле не существует значительных аномалий магнитного поля. Однако в 1874 г. была открыта Курская магнитная аномалия (первые измерения были сделаны профессором Казанского университета И. Н. Смирновым и позднее профессором Харьковского университета Н. Д. Пильчиковым); здесь вертикальная составляющая аномального поля достигает 1.45 эрстеда, в то время как ее нормальное значение составляет 0.45 эрстеда.

В настоящее время для таких аномальных местностей принято строить специальные карты, отражающие только аномальные поля возмущающих объектов, для чего из наблюдаемых значений магнитного поля вычитаются значения нормального поля в данном районе. На этих картах обычно приводятся изолинии вертикальной составляющей аномального поля и векторы аномальной горизонтальной составляющей.

За последние годы Н.-и. институтом земного магнетизма по данным генеральной и маршрутной магнитных съемок построены карты региональных магнитных аномалий в масштабе 1:1 000 000 для всей Европейской части и, частично, Азиатской части СССР. Прикладное значение таких карт чрезвычайно велико.

9 (стр. 99). Распространение теории Гаусса на случай эллипсоида вращения сделано А. Шмидтом в нескольких трудах: „Mathematische Entwicklungen zur allgemeinen Theorie des Erdmagnetismus“ (Archiv der deutschen Seewarte, XII, 1889, Nr. 3), „Der magnetische Zustand der Erde zur Epoche 1885.0 analytisch dargestellt“ (Archiv der deutschen Seewarte XXI, 1838, Nr. 2), „Mitteilungen über eine neue Berechnung des erdmagnetischen Potentials“ (Abhandlungen der kön. Bayer. Academie der Wissenschaften, Math. Phys. Cl., B. 19, 1899).

10 (стр. 102). На рис. 3 показано положение точки O , в которой определяется потенциал, и положение элемента магнитной массы $d\mu$.

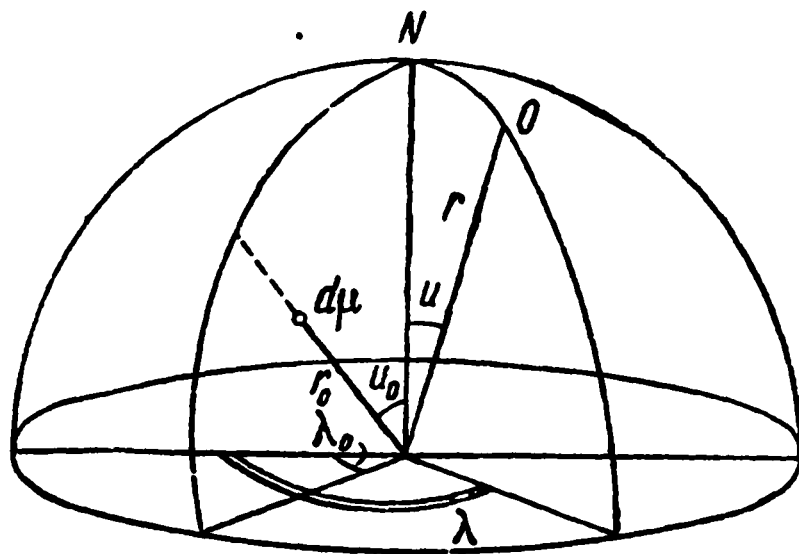


Рис. 3.

11 (стр. 104). Разложение магнитного потенциала намагниченного тела в ряд по шаровым функциям производится в настоящее время следующим образом. Положим, что мы ищем потенциал V в точке P , создаваемый намагниченным телом A . Очевидно, что

$$V = \int \frac{dm}{\rho},$$

где ρ — расстояние элемента магнитной массы dm до точки P . Положим начало координат O внутри тела, — так, чтобы расстояние $OP = r$ было больше радиуса шара, вмещающего тело A . Обозначим далее сферические координаты точки P через θ, λ, r , а координаты элемента через θ', λ', r' ; тогда

$$V = \int (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma)^{-\frac{1}{2}} dm,$$

где γ — угол между r и r' , косинус которого, согласно формуле сферической тригонометрии, может быть выражен

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos (\lambda - \lambda'). \quad (1)$$

Так как $r' < r$, то, вынося r за скобки, получим

$$V = \int \frac{1}{r} \left[1 + \left(\frac{r'^2}{r^2} - 2 \frac{r'}{r} \cos \gamma \right) \right]^{-\frac{1}{2}} dm.$$

Выражение в квадратных скобках можно разложить в ряд по биному Ньютона, что дает

$$V = \int \frac{1}{r} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r'^2}{r^2} - 2 \frac{r'}{r} \cos \gamma \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{r'^2}{r^2} - 2 \frac{r'}{r} \cos \gamma \right)^2 + \dots \right] dm. \quad (2)$$

Раскрывая далее скобки и собирая члены $\frac{r'}{r}$ с одинаковыми степенями, получим

$$V = \int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r} \left(\frac{r'}{r} \right)^n P_n(\cos \gamma) dm; \quad (3)$$

при этом $P_n(\cos \gamma)$ — некоторые функции от $\cos \gamma$ степени n , называемые полиномами Лежандра. Значение первых трех полиномов получается из непосредственного разложения в ряд по биному Ньютона. Действительно, из уравнения (2) имеем

$$P_0(\cos \gamma) = 1, \quad P_1(\cos \gamma) = \cos \gamma, \quad P_2(\cos \gamma) = \frac{1}{2} (\cos^2 \gamma - 1).$$

Остальные члены находятся по рекуррентной формуле

$$(n+1) P_{n+1} - (2n+1) \cos \gamma P_n + n P_{n-1} = 0,$$

доказываемой в теории шаровых функций. Там же доказывается, что полином Лежандра $P_n(\cos \gamma)$ при замене в нем $\cos \gamma$ его выражением (1) принимает следующий вид:

$$P_n(\cos \gamma) = \sum_{m=0}^n c_n^m P_n^m(\cos \theta) P_n^m(\cos \theta') \cos m(\lambda - \lambda'), \quad (4)$$

где функции $P_n^m(\cos \theta)$ и $P_n^m(\cos \theta')$, называемые присоединенными полиномами Лежандра, выражаются уравнениями

$$P_n^m(\cos \theta) = \sin^m \theta \frac{d^m P_n(\cos \theta)}{d(\cos \theta)^m};$$

c_n^m — числовые коэффициенты, зависящие от n и m . Поэтому, заменив

в уравнении (3) $P_n(\cos \gamma)$ выражением (4), получим

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^n \left\{ P_n^m(\cos \theta) \cos m\lambda \int c_n^m r'^n P_n^m(\cos \theta') \cos m\lambda' dm + \right. \\ \left. + P_n^m(\cos \theta) \sin m\lambda \int c_n^m r'^n P_n^m(\cos \theta') \sin m\lambda' dm \right\}. \quad (5)$$

Выражения, стоящие под знаками интегралов, не зависят от координат точки P и являются для данного тела величинами постоянными. Поэтому, обозначив их через A_n^m и B_n^m , будем иметь:

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^n (A_n^m \cos m\lambda + B_n^m \sin m\lambda) P_n^m(\cos \theta).$$

Далее, вводя обозначения

$$A_n^m = r^{n+2} g_n^m \text{ и } B_n^m = r^{n+2} h_n^m,$$

получим окончательно

$$V = r \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (g_n^m \cos m\lambda + h_n^m \sin m\lambda) P_n^m(\cos \theta),$$

где суммирование по n ведется не от нуля, а от единицы, так как первый член при $n=0$ обращается в нуль, что легко проверить простой подстановкой в уравнении (5) $n=0$.

12 (стр. 105). Гаусс утверждает здесь, что разложение потенциала V в ряд

$$V = r \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (g_n^m \cos m\lambda + h_n^m \sin m\lambda) P_n^m(\cos \theta)$$

возможно единственным образом и что такой ряд сходится, однако доказательств этому не приводит. Объясняется это тем, что когда Гаусс писал свою работу, строгого доказательства такой теоремы не существовало, хотя крупнейшие математики того времени и сам Гаусс считали ее справедливой. Первые попытки доказательства этой теоремы были сделаны еще Лапласом и Пуассоном; однако строгое доказательство было впервые дано Дирихле (Journal für Mathematik, т. 17, стр. 35—37, 1837) и Бонне (Journal de Mathematique, т. 17, стр. 256—300, 1852). В настоящее время эта теорема излагается в теории шаровых функций в следующей форме: всякая функция $f(\theta, \lambda)$, определенная на поверхности сферы

любого радиуса, является функцией географических координат θ и λ , может быть представлена в виде ряда, аналогичного ряду Фурье:

$$f(\theta, \lambda) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n P_n(\cos \theta) + \sum_{m=0}^n (a_n^m \cos m\lambda + b_n^m \sin m\lambda) P_n^m(\cos \theta) \right\}.$$

Коэффициенты a_n^m и b_n^m определяются из уравнений

$$a_n^m = \frac{2n+1}{2\pi\delta_m} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \iint f(\theta, \lambda) P_n^m(\cos \theta) \cos m\lambda d\sigma,$$

$$b_n^m = \frac{2n+1}{2\pi\delta_m} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \iint f(\theta, \lambda) P_n^m(\cos \theta) \sin m\lambda d\sigma,$$

где $\delta_m = 2$ при $m = 0$ и $\delta_m = 1$ при $m > 0$, $d\sigma$ — элемент поверхности сферы и интегрирование распространяется на всю поверхность сферы.

Доказательство этой теоремы можно найти в курсе высшей математики акад. В. И. Смирнова (т. 3, ч. 2, стр. 442—498, 1949).

13 (стр. 113). Значения коэффициентов, приводимые Гауссом, выражены в произвольных единицах. Для перехода к системе cgs все числа нужно умножить на 0.00034941.

Вычисления гауссовских коэффициентов для эпохи 1829 г. были вновь произведены Эрманом и Петерсеном в 1846—1848 гг. по улучшенным данным. Затем, пользуясь магнитными картами для 1880 г., Квинтус Ицилиус вычислил 24 гауссовских коэффициента для эпохи 1880 г. Для эпохи 1885 г. вычисления коэффициентов были произведены Неймайером. Для большего согласия с действительностью Адамс учел члены высшего порядка и в 1898 г. вычислил 49 постоянных для эпохи 1845 и 1880 гг. А. Шмидт в 1899 г. определил коэффициенты разложения потенциала (для эпохи 1885 г.), зависящего от внутренних магнитных масс и от внешних по отношению к Земле источников. В 1897 г. Фритше, учитывая члены 7-го порядка, предпринял вычисление 63 коэффициентов для эпохи 1885 г.; оказалось, что учет членов 7-го порядка не дает повышения точности, и Фритше оставил только 46 коэффициентов. Кроме того, Фритше произвел вычисления для эпох 1600, 1650, 1700, 1780 и 1842 годов с целью вывода закона векового хода коэффициентов.

Краткое изложение результатов перечисленных работ можно найти в труде Н. А. Булгакова „Теория земного магнетизма Гаусса и ее современное значение в науке“, опубликованном в „Записках по гидрографии“, т. XXXIII, 1911.

Для эпохи 1922 г., когда магнитная съемка на суше была дополнена съемкой на океанах, произведенной Институтом Карнеги (США), Дайсон и Фурнер вычислили вновь гауссовские коэффициенты; оказалось, что различие коэффициентов для эпох 1830 и 1922 гг. является несущественным.

После А. Шмидта внутреннее и внешнее поле вычислялось Бауэром для эпохи 1922 г.; результаты вычислений заставили сомневаться в реальности внешнего поля. Последние вычисления коэффициентов для эпохи 1945 г. были сделаны Афанасьевой (СССР) и Вестайном (США).

Ниже (см. стр. 312) приводится таблица значений первых восьми гауссовских коэффициентов (знаки коэффициентов в таблице противоположны знакам, принятым Гауссом); для получения этих значений в системе cgz нужно все числа уменьшить в 1000 раз.

14 (стр. 116). Вспомогательные таблицы для вычисления величины и направления магнитных сил на поверхности земли приведены после текста статьи. Расположение граф в этих таблицах несколько иное, чем то, которое описывает Гаусс. Таблицы перепечатаны из т. V первого издания „Gauss Werke“ (1867).

15 (стр. 117). Таблица сличений вычисленных и наблюдаемых значений магнитных элементов, приводимая ниже, была составлена Гауссом сначала для 91 пункта и опубликована в ежегоднике „Результаты наблюдений Магнитного союза“ в 1839 г.; но в том же номере ежегодника Гаусс одновременно опубликовал дополнение к „Общей теории магнетизма“, используя наблюдения еще в 8 пунктах, и исправил две неточности в таблице, содержащей 91 пункт. Эти дополнительные данные были учтены при составлении таблицы сличений для первого издания трудов Гаусса.

Мы даем таблицу сличений, перепечатанную из т. V трудов Гаусса. Текст дополнения Гаусса также приводится в конце его мемуара „Общая теория земного магнетизма“.

Результаты вычислений магнитных элементов для эпохи 1830 г. по теории Гаусса Вебер сравнивает с данными наблюдений, представленными на магнитных картах, относящихся примерно к той же эпохе. Такими картами являются карта магнитного склонения Барлоу, карта наклона Хорнера и карта полной напряженности Сэбайна, о которых упоминает Гаусс в § 25. Вебер отмечает (*Atlas des Erdmagnetismus*, S. 31), что вследствие недостаточности наблюдений эти карты составлены весьма произвольно и что данные теории могут послужить к исправлению этих карт в тех областях, где изолинии проведены совершенно произвольно.

В основных же чертах результаты вычислений совпадают с наблюдениями, что подтверждает правильность определения Гауссом коэф-

Автор	Эпоха	g_1°	g_1'	h_1'	g_2°	g_2'	g_2^2	h_2'	h_2^2
Гаусс	1830	—3235	—311	625	77	506	— 2	21	136
Эрман и Петерсен .	1829	—3201	—289	601	— 8	257	—14	— 4	146
Квинтус Ицилиус . .	1880	—3339	—276	619	— 55	519	42	— 38	124
Неймайер	1885	—3157	—248	602	— 79	498	57	—130	126
Адамс	1845	—3219	—278	578	13	491	4	— 18	116
Адамс	1880	—3168	—243	603	— 73	514	53	—129	129
Фритше	1842	—3227	—275	593	3	475	7	— 24	115
Фритше	1885	—3164	—241	591	— 53	496	59	—131	123
Шмиат	1885	—3173	—236	598	— 78	490	59	—124	129
Дайсон и Фурнер .	1922	—3095	—226	592	— 89	299	144	—124	84
Вестайн	1945	—3057	—211	581	—127	296	164	—166	54
Афанасьева	1945	—3032	—229	590	—125	288	150	—146	48

циентов разложения потенциала. „Таким образом, — пишет Вебер, — в настоящее время земной магнетизм впервые полностью определяется по своим элементам, именно по указанным... 24 числам (подобно тому как пути планет и комет определяются по их элементам). Впоследствии подобные определения должны повторяться; отсюда, исследуя изменения магнитного состояния Земли в целом и в отдельных частностях, можно получить данные для истории земного магнетизма, — цель, которая не могла бы быть достигнута простым исследованием без теории, так как простые исследования обнаруживают изменение только отдельных проявлений, но не изменения целого. Настоящий атлас земного магнетизма является началом ряда атласов, которые должны появляться через соответствующие промежутки времени и, начиная с настоящего времени, отражать полно и наглядно основные данные истории земного магнетизма. Историю же прошлого времени восстановить невозможно“. Такими словами Вебер заканчивает описание карт „Атласа земного магнетизма“.

По этому поводу можно заметить, что Вебер оказался не вполне правым в своем последнем утверждении. Историю земного магнетизма удастся отчасти восстановить, исследуя так называемый „ископаемый магнетизм“. Известно, например, что образцы глины в процессе обжигания намагничиваются по направлению геомагнитного поля, действующего во время остывания образцов; это намагничение сохраняется по своей величине и направлению весьма устойчиво в течение длительного времени. Таким образом, зная положение кирпичей при обжигании, можно устанавливать по направлению намагничения кирпичей различных старинных зданий величину угла наклона, соответствующую дате постройки. Успешные исследования такого рода были произведены французским магнитологом Э. Теллье (E. Thellier. Sur l'aimantation des terres cuites et ses applications geophysiques. Thèses. Paris, 1938), получившим кривую изменения наклона в Париже начиная с 1400 г., т. е. примерно за 4 века до начала магнитных наблюдений.

Исследование намагничения лав также обнаружило, что, остывая после извержения, лавы намагничиваются по направлению действующего магнитного поля. Зная возраст различных лавовых потоков и определяя направление намагничения отдельных образцов лав в положении *in situ*, можно установить величину угла наклона, соответствующую определенной дате извержения вулкана. Такие измерения были произведены Шевалье для лав Этны.

Работы Теллье и других авторов обнаружили также и зависимость величины интенсивности остаточного намагничения обожженных глин и различных горных пород от величины действующего магнитного поля при остывании образцов от точки Кюри до температуры окружающей

среды. Измеряя остаточное намагничение горных пород различного геологического возраста, можно определить *величину* напряженности геомагнитного поля в различные геологические эпохи.

16 (стр. 118, 119, 122, 124). Приводим современные названия географических пунктов, упоминаемых Гауссом:

Екатеринбург	Свердловск.
Нижний Новгород	г. Горький.
Оренбург	Чкалов.
Троицкосавск	Кяхта.
Христиания	Осло.
Кенигсберг	Калининград.
Петропавловск	Петропавловск-Камчатский.
Верхнеудинск	Улан-Удэ.
Урга	Улан-Батор.

17 (стр. 121). На прилагаемых картах изолиний магнитного потенциала значения $\frac{V}{R}$ указаны в произвольных единицах.

Как видно по карте изолиний, составленной для части земной поверхности между 70° южной широты (в меркаторской проекции), значения $\frac{V}{R}$ растут арифметически от юга к северу; вблизи экватора направление изолиний почти параллельно экватору, отклонение наблюдается только в Африке.

Наибольшее сближение изолиний наблюдается у экватора, по направлению же к полюсам расстояние между изопотенциальными линиями возрастает.

При построении карт изолиний для полярных областей в стереографической проекции весьма часто приходилось прибегать к интерполяции; вместо нанесения изолиний Вебер здесь использовал штриховку различной густоты. По этим картам видно, что изолинии замыкаются вокруг точек, являющихся магнитными полюсами.

Для пояснения распределений линий равного потенциала на земной поверхности допустим, что земная сфера намагничена однородно. Тогда ее магнитный потенциал V эквивалентен потенциалу диполя $V = \frac{M \cos \theta}{r^2}$, где M — магнитный момент диполя, θ — угол между $\vec{M}$ и радиусом-вектором r той точки, где определяется потенциал.

На рис. 4 показано распределение линий равных значений V диполя. Значения V даны в условных единицах: контур Земли, пересекающий систему изолиний V показан пунктиром. По виду изолиний ясно, что их сгущение будет максимальным у экватора; у полюсов изопотенциальная поверхность будет касаться земной поверхности.

В § 30 Гаусс приводит вычисленные им координаты северного и южного магнитных полюсов. Несмотря на неполноту материала, которым располагал Гаусс для эпохи 1830 г., результаты его вычислений хорошо согласуются с действительностью. Джеймс Кларк Росс нашел 1 июня 1831 г. северный магнитный полюс в пункте $\varphi = 70^\circ 5'$ сев. широты и $\lambda = 263^\circ 14'$ вост. долготы. По наблюдениям Амундсена в 1903 г., координаты северного магнитного полюса $\varphi = 70^\circ 30'$ сев. широты и $\lambda = 264^\circ 30'$ вост. долготы. Координаты же южного магнитного полюса в 1841 г., по наблюдениям вблизи полюса Росса, $\varphi = 75^\circ 5'$ южной широты, $\lambda = 154^\circ 8'$ вост. долготы; по наблюдениям английских антарктических экспедиций в 1903 г., $\varphi = 72^\circ 41'$ южн. широты, $\lambda = 156^\circ 25'$ восточной долготы; в 1909 г. — $\varphi = 72^\circ 25'$ южной широты, $\lambda = 154^\circ 00'$ восточной долготы. Изменение положения магнитных полюсов за период 1905—1945 гг., обнаруженное по картам наблюдаемых значений геомагнитного поля, указано в сводке Института Карнеги (Description of the Earth's Main Magnetic Field and its Secular Change, 1905—1945, Carnegie Institution of Washington Publication. Washington, 1947). См. также статью К. Б. Вейиберга „Положение магнитных полюсов земного шара“. Изв. АН СССР, отд. матем. и естеств. наук, 1937, стр. 209—254.

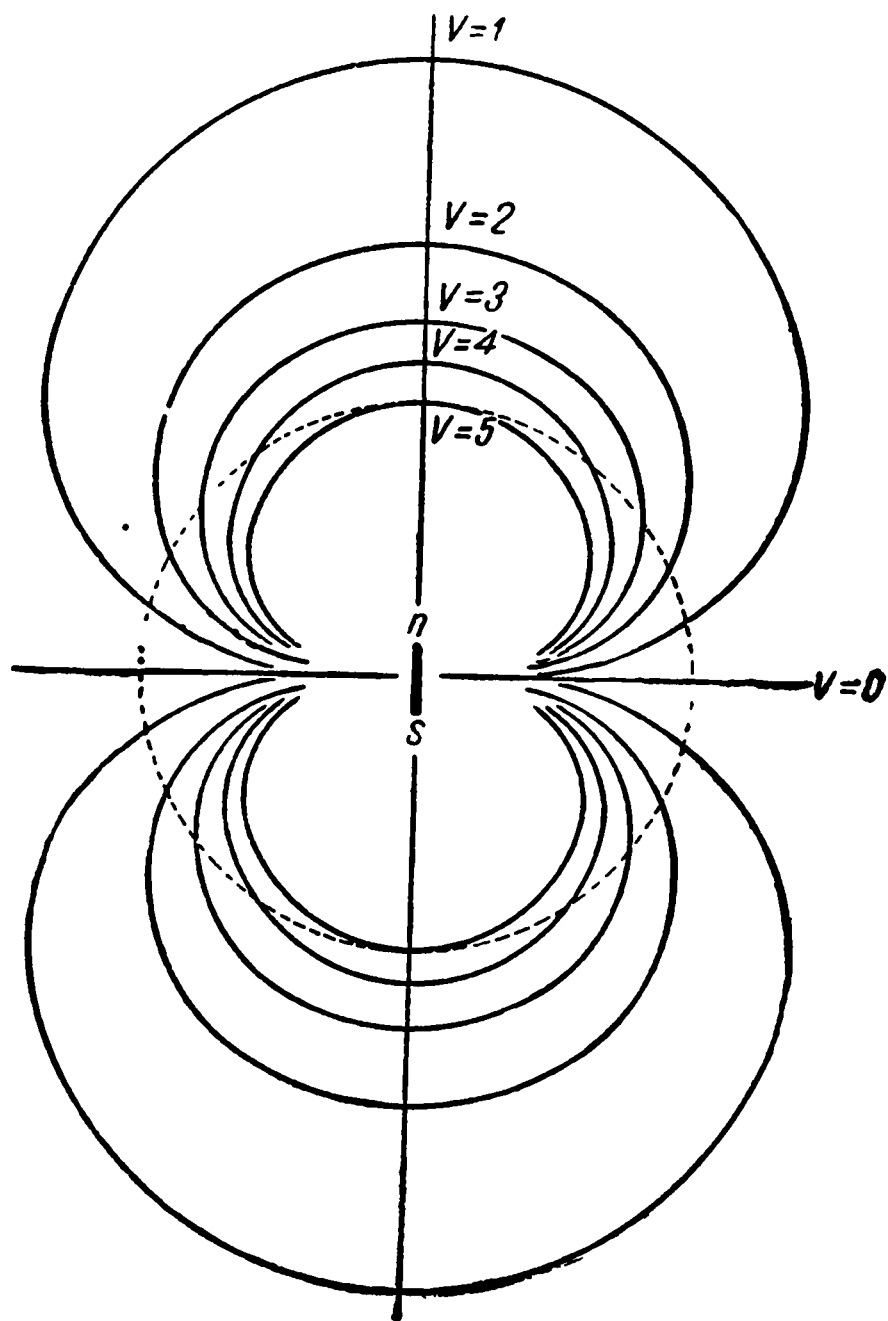


Рис. 4.

18 (стр. 133). Карта распределения плотности фиктивной магнитной жидкости прилагается к работе Гаусса „Общие теоремы относительно сил притяжения и отталкивания, действующих обратно пропорционально квадрату расстояний“; см. примечание [2] к этой работе.

19 (стр. 135). В настоящее время на каждом пункте магнитной съемки определяются все три элемента геомагнитного поля и наблюдения приводятся к одному моменту времени, что осуществляется благодаря налаженной службе векового хода. Вековой ход геомагнитных

элементов определяется, во-первых, на магнитных обсерваториях, распределенных в различных местах земной поверхности и, во-вторых, специальными экспедициями, посылаемыми на пункты векового хода через соответствующие промежутки времени. Число магнитных обсерваторий на земном шаре в настоящее время равно 64, из них в СССР находится 13 обсерваторий. Изучение векового хода имеет значение для теоретического исследования магнетизма Земли в целом и, кроме того, необходимо для целей магнитной картографии.

20 (стр. 136). Мысль Гаусса о существовании электрических токов, порождающих магнитное поле, наблюдаемое на земной поверхности, не лишена основания и, как известно, полностью подтвердилась современными исследованиями ионосферы. Гаусс, как видно из его рассуждения, опирался в подтверждение своего предположения на единственный факт, известный в его время, — полярные сияния, которые он рассматривал как движение зарядов. В настоящее время нам известно, что наличие токов в ионосфере подтверждается не только явлением полярных сияний, но и фактом отражения радиоволн от высоких слоев атмосферы.¹ Эти факты позволили установить существование проводящих слоев атмосферы на высоте 100—300 км, проводимость которых легко определяется. Из наблюдений же над вариациями магнитного поля Земли путем математического анализа их доказывалось наличие замкнутых вихревых токов в атмосфере в хорошем согласии с наблюдаемой проводимостью. Поэтому мы можем в настоящее время не предполагать, а утверждать, что такие токи действительно существуют и вызывают магнитное поле, которое наблюдается в форме вариаций. Таким образом, Гаусс почти за 100 лет до фактического обнаружения проводящих слоев атмосферы высказал предположение об их существовании.

21 (стр. 140). Метод Гаусса разложения магнитного потенциала в ряд по сферическим функциям позволяет разделять магнитное поле Земли, происходящее от внутренних причин, от магнитного поля, происходящего от внешних причин. В § 39 Гаусс приводит доказательство того, что причины, вызывающие магнитное поле Земли, лежат исключительно внутри Земли. Более подробное доказательство этого положения заключается в следующем. Если причины, вызывающие магнитное поле, лежат внутри Земли, то разложение потенциала в ряд, как было показано в примечании [12], имеет вид

$$V_i = \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{r'^n}{r^{n+1}} P_n(\cos \gamma) dm$$

¹ В 1951 г. наличие токов в ионосфере подтверждено прямыми измерениями магнитного поля в ионосфере с помощью магнитометров, установленных на ракетах (Singer S. F. J. Geophys. Research: 56, 265, 1951).

или

$$V_i = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^{n+2}}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^n (g_n^m \cos m\lambda + h_n^m \sin m\lambda) P_n^m(\cos \theta), \dots, \quad (1)$$

где $r' < r$, R — радиус Земли.

Если же причины расположены вне Земли, то r' — расстояние от элементарной массы до центра Земли — будет больше r . Поэтому разложение примет форму

$$V_e = \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{r^n}{r'^{n+1}} P_n(\cos \gamma) dm$$

или

$$V_e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{R^{n+1}} \sum_{m=0}^n (j_n^m \cos m\lambda + k_n^m \sin m\lambda) P_n^m(\cos \theta), \dots, \quad (2)$$

где коэффициенты j_n^m и k_n^m будут иметь другие значения, чем в уравнении (1).

Составляющие поля от внутренних причин на поверхности земли, где $R=r$, очевидно, будут:

$$\left. \begin{aligned} X_i &= -\frac{\partial V_i}{r \partial \theta} = - \sum \sum (g_n^m \cos m\lambda + h_n^m \sin m\lambda) \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta}, \\ Y_i &= -\frac{\partial V_i}{r \sin \theta \partial \theta} = \sum \sum (m g_n^m \sin m\lambda - m h_n^m \cos m\lambda) \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta}, \\ Z_i &= -\frac{\partial V_i}{\partial r} = \sum \sum [(n-1) g_n^m \cos m\lambda + \\ &\quad + (n-1) h_n^m \sin m\lambda] P_n^m(\cos \theta), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

а составляющие от внешних причин:

$$\left. \begin{aligned} X_e &= - \sum \sum (j_n^m \cos m\lambda + k_n^m \sin m\lambda) \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta}, \\ Y_e &= \sum \sum (m j_n^m \sin m\lambda - m k_n^m \cos m\lambda) \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta}, \\ Z_e &= \sum \sum (-n j_n^m \cos m\lambda - n k_n^m \sin m\lambda) P_n^m(\cos \theta). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Эти уравнения показывают, что если определять коэффициенты g_n^m и h_n^m , или j_n^m и k_n^m по наблюдаемым значениям X и Y , то мы не сможем

определить, относятся ли они к внутренним или внешним причинам, так как уравнения для X_i и X_e , а также для Y_i и Y_e по форме одинаковы. Если же вычисления коэффициентов производить по наблюдаемым значениям Z , то в зависимости от того, какая из формул, (3) или (4), будет применяться при вычислениях, значения коэффициентов будут различны. Если они совпадают со значениями коэффициентов, вычисленных по X и Y при пользовании формулой (3), то мы имеем дело с внутренними причинами, как это и установил Гаусс. Если же они совпадают при пользовании формулой (4), то мы имеем дело с внешними причинами. Если же они не совпадают ни в том, ни в другом случае, то поле имеет как внешние, так и внутренние причины. В этом случае наблюдаемые значения X , Y и Z будут представлять суммы внутренних и внешних причин, т. е.

$$\begin{aligned}
 X = X_i + X_e &= - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[(g_n^m + j_n^m) \cos m\lambda + \right. \\
 &\quad \left. + (h_n^m + k_n^m) \sin m\lambda \right] \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta}, \\
 Y = Y_i + Y_e &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[(g_n^m + j_n^m) \sin m\lambda - \right. \\
 &\quad \left. - (h_n^m + k_n^m) \cos m\lambda \right] \frac{mP_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta}, \\
 Z = Z_i + Z_e &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left\{ [(n+1)g_n^m - nj_n^m] \cos m\lambda + \right. \\
 &\quad \left. + [(n+1)h_n^m - nk_n^m] \sin m\lambda \right\} P_n^m(\cos \theta).
 \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$\left. \begin{aligned}
 g_n^m + j_n^m &= p_n^m, & h_n^m + k_n^m &= q_n^m, \\
 (n+1)g_n^m - nj_n^m &= S_n^m, & (n+1)h_n^m - nk_n^m &= t_n^m.
 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

По данным наблюдений X , Y и Z мы можем определить p_n^m , q_n^m , S_n^m и t_n^m , а зная их, можем, решая уравнения (5), найти отдельно коэффициенты g_n^m и h_n^m , соответствующие полю, вызываемому внутренними причинами, и коэффициенты j_n^m и k_n^m , соответствующие внешним причинам. Впервые такое разложение было произведено Шмидтом в 1898 г.

В 1922 г. Бауэр, пользуясь наблюдениями, произведенными Институтом Карнеги по всему земному шару, вычислил более точно значения элементов земного магнетизма для поля, обусловленного внешними и внутренними причинами. Оказалось, что на долю внутренних причин приходится около 94% наблюдаемого поля, а на долю внешних причин около 6%.

22 (стр. 140). Как уже указывалось в примечании [21], разложение магнитного поля Земли на поле от внутренних и поле от внешних источников было сделано в 1898 г. для эпохи 1885 г. Шмидтом и для эпохи 1922 г. Бауэром. Вычисления показали, что потенциальное поле от внешних источников составляет около 6% всего поля Земли. Необходимо заметить, однако, что погрешность определения коэффициентов разложения поля от внешних источников имеет такой же порядок.

23 (стр. 143). Как впервые показал Максвелл, кроме токов проводимости, состоящих в движении электрических зарядов по проводникам, существуют токи смещения в диэлектриках. Движение электрических зарядов может не образовывать замкнутого кругового процесса: переменный ток проводимости в цепи, состоящей из генератора, проводников и последовательно включенного конденсатора, замыкается благодаря возникновению токов смещения в диэлектрике между обкладками конденсатора.

Гаусс еще не мог знать о существовании токов смещения.

24 (стр. 144). Карты изогон, построенные Вебером и Гольдшмидтом по вычисленным значениям склонения для „Атласа земного магнетизма“, даны в приложении. Карта изогон в меркаторской проекции охватывает часть земной поверхности от 70° южной широты до 70° северной широты; полярные области изображены в стереографической проекции. Западное склонение на этих картах считается положительным, восточное — отрицательным. На картах изогон обнаруживаются две линии нулевого склонения; Гаусс и Вебер уже знали о том, что эти линии меняют свое положение с течением времени. На стр. 6 и 7 „Атласа земного магнетизма“ Вебер дает подробное описание распределения изогон на земной поверхности.

Сопоставляя карту линий разного потенциала („линий равновесия“, по терминологии Гаусса и Вебера) с картой изогон, Вебер пишет: (стр. 21 „Атласа“): „... линии равновесия могут быть очень просто определены как такие линии, которые пересекают направление буссоли везде под прямым углом“, — т. е., иными словами, силовые линии магнитного поля всегда ортогональны к эквипотенциальным линиям. На этом основании Вебер предлагает для определения направления стрелки буссоли в данном месте использовать только карту изолиний $\frac{V}{R}$, не строя

карты изогон. Это предложение Вебера в дальнейшем не было принято.

25 (стр. 145). На картах изодинам (изолиний полной напряженности магнитного поля), приведенных в „Приложении“, значения напряженностей указаны в произвольных единицах.

Для перехода к системе cgs данные необходимо умножить на 0.0003494. На карте изодинам в меркаторской проекции наименьшее значение напряженности составляет 809.4 условных единицы (0.283 эрстеда); оно соответствует пункту $18^{\circ}27'$ южной широты и $350^{\circ}12'$ восточной долготы (близ о-ва св. Елены). Максимальное значение напряженности на этой карте равно 1763.1 условных единицы (0.616 эрстеда) — в пункте на $54^{\circ}32'$ северной широты и $261^{\circ}27'$ восточной долготы. На карте южной полярной области (в стереографической проекции) максимум (2260.5 условных единиц, или 0.790 эрстеда) расположен на $70^{\circ}9'$ южной широты и $160^{\circ}26'$ восточной долготы. По карте северной полярной области видно, что здесь ход изодинам сложнее: здесь отмечаются две отдельных области максимальной напряженности.

26 (стр. 145). Все магнитные карты, о которых говорит здесь Гаусс, содержатся в „Атласе земного магнетизма“. Мы приводим в „Приложении“ только карты изолиний горизонтальной и вертикальной составляющих в меркаторской проекции для части земной поверхности между 70° южной и 70° северной широты. Значения напряженности даны в произвольных единицах; переходный множитель к системе cgs равен 0.0003494.

Наибольшие значения горизонтальная составляющая имеет на экваторе и убывает по направлению к полюсам. Сопоставляя данную карту с картой $\frac{V}{R}$, Вебер отмечает, что горизонтальная напряженность везде обратно пропорциональна расстоянию между линиями равных значений $\frac{V}{R}$.

Карта изолиний вертикальной составляющей Z почти полностью совпадает с картой идеального распределения плотности магнетизма на поверхности Земли. Как показывает Гаусс в § 12 своей работы, плотность магнитной жидкости в каждой точке земной поверхности выражается формулой

$$\frac{1}{4\pi} \left(\frac{V}{R} - 2Z \right).$$

Вебер объясняет указанное сходство карт (стр. 31 „Атласа“) тем, что величина Z значительно больше величины $\frac{V}{R}$; это означает, что

плотность магнетизма может вычисляться по приближенной формуле $\frac{Z}{2\pi}$.

Сопоставляя карты Гаусса с современными картами, мы замечаем достаточное сходство в распределении изолиний.

27 (стр. 145). Работа Гаусса „Общая теория земного магнетизма“, помещенная в V т. его трудов, дополнена следующими строками.

„Кроме приведенных в статье сравнений вычислений с наблюдениями для 99 пунктов, в «Результатах» и в «Атласе» сообщаются еще сравнения для 44 других пунктов, приводимые здесь.

„Данные для острова Чафаринос, Тулона и для пункта $\varphi = 70^{\circ}53'$ северной широты и 170° долготы находятся в «Атласе». Остальные сравнения произведены Б. Гольдшмидтом и даны им со ссылкой на наблюдения вместе со следующими указаниями в «Результатах» за 1840 и 1841 гг.:

„Наблюдения в Палермо были произведены д-ром Сарториусом фон Вальтерсгаузенем и проф. Листингом в конце 1835 г.

„Наблюдения в Гибралтаре, так же как и определения наклонения и напряженности в Алжире, произведены в 1840 г. экспедицией Норвежского корвета «Ornen» капитанами Коновым и Валером и сообщены нам проф. Ханстином. Склонение в Алжире определено в 1832 г., заимствовано из «Description nautique des côtes de l'Algerie» у Берара (Париж, 1839).

„Наблюдение на $67^{\circ}4'$ южной широты было сделано в 1840 г. американским капитаном флота Унлком и сообщено в «Листках литературной беседы», № 6, 1841.

„Наблюдения в Кодьяке, бухте Бэкера, форте Ванкувер, Бодега, Монтерей, Сан-Барбара, Сан-Педро, Сан-Диего, Сан-Квентин, Сан-Бартоломео, бухте Магдалены, Мазатлане, бухте Сан-Лукас, Сан-Блас, Акапулько, Кокосовом острове, острове Пуна проведены капитаном Бельчером в 1837—1840 гг. и опубликованы Себайном в Королевском обществе в Лондоне в статье «Contributions to terrestrial Magnetism». В Сокорро, Кларион, острове Мартин и острове Боу склонение также определялось, но еще не приведено в статье Себайна. Чтобы устранить неопределенность, которая еще имела место относительно напряженности на о. Таити, на своем обратном пути Бельчер направился к о. Таити и путем многочисленных наблюдений определил элементы на горе Венера. Кроме этих пунктов, Снтка, Сан-Франциско и Оау, где Бельчер произвел новые наблюдения, уже входили в первую таблицу сравнений по другим наблюдениям.

„Элементы в Кремсмюнстере определены проф. Коллером. Наблюдения в Тривандруме, произведенные директором тамошней магнитной обсерватории г-ном Кальдекоттом, приведены в небольшой брошюре

	Широта	Долгота	Склонение		
			вычис- ленное	наблю- денное	разность
1. На льду	+70°53'	170° 0'	—16°47'	—18°49'	+2° 2'
2. Туруханск	65 55	87 33	— 9 19	—15 0	+5 41
3. Дронтгейм	63 26	10 24	+20 17	+20 0	+0 17
4. Вилюйск	62 49	119 27	+ 0 37	+ 1 52	—1 15
5. Богословское	59 45	60 7	— 5 38	— 9 9	+3 31
6. Фредриксварн	59 0	10 4	+20 18	—	—
7. Енисейск	58 27	92 11	— 6 33	— 6 57	+0 24
8. Кадьяк	57 20	207 9	+24 38	—26 43	+2 5
9. Копенгаген	55 41	12 34	+18 37	+17 40	+0 57
10. Альтона	53 33	9 56	+20 28	+18 43	+1 45
11. Семипалатинск	50 24	80 21	— 6 50	— 6 43	—0 7
12. Кремсмюнстер	48 3	14 8	+18 26	+15 46	+2 40
13. Бухта Бэкер	46 17	235 58	—20 46	—19 11	—1 35
14. Форт Ванкувер	45 37	237 24	—20 8	—19 22	—0 46
15. Тулон	43 6	5 55	+22 26	+19 6	+3 20
16. Барселона	41 25	2 15	+23 45	—	—
17. Лиссабон	38 43	350 58	+26 1	—	—
18. Ангра (Терсейра)	38 39	332 47	+25 17	+24 2	+1 15
19. Порт Бodega	38 18	236 58	—16 41	—15 20	—1 21
20. Мессина	38 11	15 34	+19 16	—	—
21. Палермо	38 7	13 21	+19 29	+16 3	+3 26
22. Алжир	36 47	3 4	+23 18	+19 25	+3 53
23. Монтерей	36 36	238 7	—15 47	—14 13	—1 34
24. Гибралтар	36 7	354 41	+24 54	+21 40	+3 14

Наклонение			Напряженность		
вычислен- ное	наблюден- ное	разность	вычислен- ная	наблюден- ная	разность
+79°27'	+81° 9'	— 1°42'	1.675	—	—
77 20	77 46	—0 26	1.662	1.678	—0.016
74 7	74 12	—0 5	1.483	1.415	+0.068
75 44	76 46	—1 2	1.675	1.765	—0.090
70 45	71 36	—0 51	1.556	1.524	+0.032
71 37	72 1	—0 24	1.450	1.436	+0.014
72 33	73 24	—0 51	1.647	1.674	—0.027
73 22	72 43	+0 39	1.638	1.603	+0.035
68 52	70 0	—1 8	1.419	1.372	+0.047
68 9	69 2	—0 53	1.405	1.357	+0.048
64 44	65 18	—0 34	1.551	1.560	—0.009
63 8	64 34	—1 26	1.348	1.339	+0.009
71 12	69 27	+1 45	1.675	1.643	+0.032
70 56	69 22	+1 34	1.676	1.657	+0.019
61 15	62 58	—1 43	1.320	—	—
61 12	62 15	—1 3	1.324	1.288	+0.036
63 0	61 58	+1 2	1.352	1.299	+0.053
68 34	66 50	+1 44	1.469	1.449	+0.020
64 28	62 53	+1 35	1.588	1.563	+0.025
54 12	56 10	—1 58	1.219	1.232	—0.013
53 54	57 16	—3 22	1.242	1.274	—0.032
56 52	57 43	—0 51	1.267	1.272	—0.005
63 10	61 4	+2 6	1.579	1.531	+0.048
59 35	59 40	—0 5	1.307	1.297	+0.010

	Широта	Долгота	Склонение		
			вычис- ленное	наблю- денное	разность
25. О-ва Чафаринос	+35°11'	357°34'	+24°35'	+21° 7'	+ 3 28
26. Сан-Барбара	34 24	240 19	—14 40	—13 28	— 1 12
27. Сан-Педро	33 43	241 45	—14 13	—13 8	— 1 5
28. Сан-Диего	32 41	242 47	—13 42	—12 21	— 1 21
29. Сан-Квентин	30 22	244 2	—12 53	—12 6	— 0 47
30. Сан-Бартоломео	27 40	245 7	—12 1	—10 46	— 1 15
31. Бухта Магдалены	24 38	247 53	—11 5	— 9 15	— 1 50
32. Мазатлан	23 11	253 36	—10 15	— 9 24	— 0 51
33. Сан-Лукас	22 52	250 7	—10 31	— 8 37	— 1 54
34. Сан-Блас	21 32	254 44	— 9 55	— 9 0	— 0 55
35. О. Сокорро	18 43	249 6	— 9 55	—	—
36. О. Кларион	18 21	245 19	—10 0	—	—
37. Акапулько	+16 50	260 5	— 9 3	— 8 23	— 0 40
38. Тривандрум	8 31	77 0	— 3 14	— 0 44	— 2 30
39. Кокосовые о-ва	+ 5 53	272 58	— 8 11	— 8 24	+ 0 13
40. О. Пуна	— 2 47	280 5	— 8 23	— 8 56	+ 0 33
41. О. Мартина	— 8 56	220 20	— 5 27	—	—
42. О. Боу	—18 5	219 7	— 5 21	—	—
43. Рио-Гранде	—32 2	307 40	— 7 29	—	—
44. —	—67 4	147 30	+ 6 20	—12 35	+18 55
44. Ситка	+57 3	224 35	—28 45	—29 32	+ 0 47
62. Сан-Франциско	+37 49	237 35	—16 22	—15 20	— 1 2
62*. Оау	+21 17	202 0	—12 19	—10 40	— 1 39
72. О. Таити	—17 29	210 30	— 5 45	— 6 30	+ 0 45

Приложение

Наклонение			Напряженность		
вычислен- ное	наблюден- ное	разность	вычислен- ная	наблюден- ная	разность
+57°32	+58°34'	—1° 2'	1.283	—	—
61 23	58 54	+2 29	1.559	1.501	+0.058
60 56	58 21	+2 35	1.556	1.480	+0.076
60 7	57 6	+3 1	1.547	1.482	+0.065
57 42	54 30	+3 12	1.514	1.461	+0.053
54 43	51 41	+3 2	1.475	1.432	+0.043
51 24	46 34	+4 50	1.434	1.362	+0.072
50 35	46 38	+3 57	1.429	1.370	+0.059
49 26	45 39	+3 47	1.411	1.359	+0.052
48 35	44 33	+4 2	1.405	1.362	+0.043
43 11	40 44	+2 27	1.331	1.307	+0.024
41 50	37 3	+4 47	1.310	1.222	+0.088
+42 50	—37 57	+4 53	1.335	1.316	+0.019
— 7 15	+ 2 50	—4 25	1.014	1.012	+0.002
+27 46	+22 56	+4 50	1.172	1.125	+0.047
+13 23	+ 9 8	+4 15	1.062	1.024	+0.038
—12 44	—14 6	+1 22	1.026	1.024	+0.002
—28 46	—30 16	+1 30	1.125	1.123	+0.002
—33 14	—30 4	—3 10	0.997	0.967	+0.030
—85 59	—87 30	+1 31	2.248	—	—
+76 30	+75 49	+0 41	1.697	1.704	—0.007
+64 14	+62 6	+2 8	1.592	1.540	+0.052
+37 36	+41 17	—3 41	1.125	1.134	—0.009
—27 26	—30 18	+2 52	1.113	1.133	—0.020

Себайна «Observations made at the magnetic observatories of Toronto, Trevandrum and St. Helena during a remarkable magnetic disturbance of the 25th and 26th Sept. 1841».

„Сообщениями о наблюдениях в Туруханске, Дроитгейме, Вилуйске, Богословском, Фредригсварне, Енисейске, Копенгагене, Альтоне, Семи-палатинске, Барселоне, Лиссабоне, Ангре, Мессине, Рио-Гранде я обязан любезности г-на профессора Ханстина“.

К отчету и работе „Общие теоремы относительно сил притяжения и отталкивания, действующих обратно пропорционально квадрату расстояния“

Предварительный краткий отчет о работе „Общие теоремы относительно сил притяжения и отталкивания, действующих обратно пропорционально квадрату расстояния“, был опубликован в „Cöttingische gelehrte Anzeigen“ 26 марта 1840 г., затем в V т. „Gauss Werke“, SS. 306—312.

Этому отчету в указанных Anzeigen предшествовали слова:

„9 марта 1840 г. придворный советник Гаусс представил Королевскому ученому обществу статью под заглавием «Общие теоремы относительно сил притяжения и отталкивания, действующих обратно пропорционально квадрату расстояния», содержание которой приводится ниже“.

Сама работа под этим названием впервые была напечатана в ежегоднике „Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins“, 1840, SS. 1—51, затем в V т. „Gauss Werke“, SS. 195—242 и в издании Ostwald's Klassiker, № 2, herausgegeben von A. Wangerin. Leipzig, 1889.

См. также: Journal des Mathématique pures et appliquées, par Joseph Liouville. Paris. VII, 1842, pp. 273—324; Scientific, Memoirs by Taylor, III, 1843, pp. 153—196.

1 (стр. 176). См. карту идеального распределения плотности фиктивного магнетизма на поверхности земли (стр. 165), перепечатанную из „Атласа земного магнетизма“ Гаусса и Вебера. Плотность магнетизма на карте выражена в произвольных единицах; для перехода к системе cgs значения изолиний нужно умножить на 0.0003494.

Вебер дает следующее пояснение относительно этой карты („Атлас“, стр. 4): „Не существует и не может существовать такой точки на Земле или внутри ее, где можно было бы представить себе сосредоточенным весь магнетизм, подобно тому как можно представить себе всю массу Земли сосредоточенной в ее центре. Однако могут существовать точки, где можно представить себе значительную концентрацию магнетизма. Эти точки нельзя смешивать с магнитными полюсами, с которыми они

не связаны ни своим числом, ни своим расположением. В самом деле, в то время как существует два магнитных полюса, наибольшую плотность магнетизма можно представить себе в трех местах земной поверхности: южный магнетизм в двух местах и северный — в одном месте, именно:

55°26'	северной	широты,	262°54'	долготы
70 51	„	„	115 38	„
70 28	южной	„	159 13	„

„Эти три пункта расположены очень близко к тем местам, где полная интенсивность достигает своего максимального значения“.

Далее Вебер говорит: „Там, где мы представляем себе наибольшее уплотнение магнетизма, в действительности это не обязательно должно иметь место; наоборот, возможно, что в таких местах находится очень мало магнетизма или он совсем отсутствует, подобно тому как в центре Земли в действительности может находиться ничтожная масса или совсем отсутствовать, несмотря на то, что притяжение всей Земли на внешнюю точку таково, как если бы вся масса Земли была сосредоточена в ее центре.“

Фактические большие скопления магнитных масс вблизи поверхности земли уже на незначительном удалении будут действовать очень слабо сравнительно с магнетизмом всей Земли, следовательно будут создавать только локальные возмущения. Если включить в рассмотрение такие локальные влияния, то элементы теории нельзя определить с необходимой полнотой и точностью ни в настоящее время, ни в будущем. Если будет обнаружена такая местность, то для нее могут быть построены специальные магнитные карты, и сравнение такой карты с предварительными общими картами даст возможность сделать вероятные предположения относительно местонахождения и величины фактически имеющих магнитных масс“.

Таким образом, Вебер указывает здесь на принципиальную возможность интерпретации аномалий геомагнитного поля.

2 (стр. 176). По современной терминологии, „поверхность равновесия“ принято называть поверхностью уровня потенциала. В русском переводе сохранена терминология Гаусса.

3 (стр. 177). Упоминаемая статья Пуассона имеет название: „Mémoire sur la distribution de l'électricité à la surface de corps conducteurs“ (Mémoires de la classe de science mathématiques et physique de l'Institut de France. Année 1811).

Во второй части своего мемуара Пуассон пишет: „... если несколько наэлектризованных проводящих тел помещены по соседству друг с другом и если они находятся в постоянном электрическом состоянии, то необходимо, чтобы в этом состоянии результирующее действие элек-

трических слоев, покрывающих эти тела, на точку, взятую где-либо внутри одного из этих тел, было равно нулю“.

Тот факт, что при равновесном состоянии электричество распространяется по поверхности проводника, был известен еще ранее Кулону, который описал основные свойства „электрических жидкостей“ [см., например, издание Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften: Vier Abhandlungen über die Electricität und den Magnetismus von Coulomb (1785—1786), übersetzt und herausgegeben von König. Leipzig, 1890]. Еще в 1772 г. Кавендиш, опираясь на вышеупомянутый факт, показал, что силы взаимодействия между частицами электричества обратно пропорциональны r^{2+q} . По наблюдениям Кавендиша оказалось, что $q < \frac{1}{50}$ (H. Cavendish. Electrical Researches. Edited by Cl. Maxwell, 1879).

4 (стр. 178). Гаусс имеет здесь в виду статью французского геометра Шаля (Chasles), напечатанную в „Comptes Rendus“, t. VIII, 1839, p. 209—212. (Гаусс ошибочно ссылается на VI т.). Эта статья имеет название: „Enoncé de deux théorèmes généraux sur l'attraction de corps et la théorie de la chaleur“ („Сообщение о двух общих теоремах относительно притяжения тел и относительно теории теплоты“). Шаль утверждает здесь, в противоположность Гауссу, что „данная поверхность всегда может быть покрыта бесконечным множеством бесконечно тонких слоев, обладающих свойством не производить никакого действия на любую внутреннюю точку“.

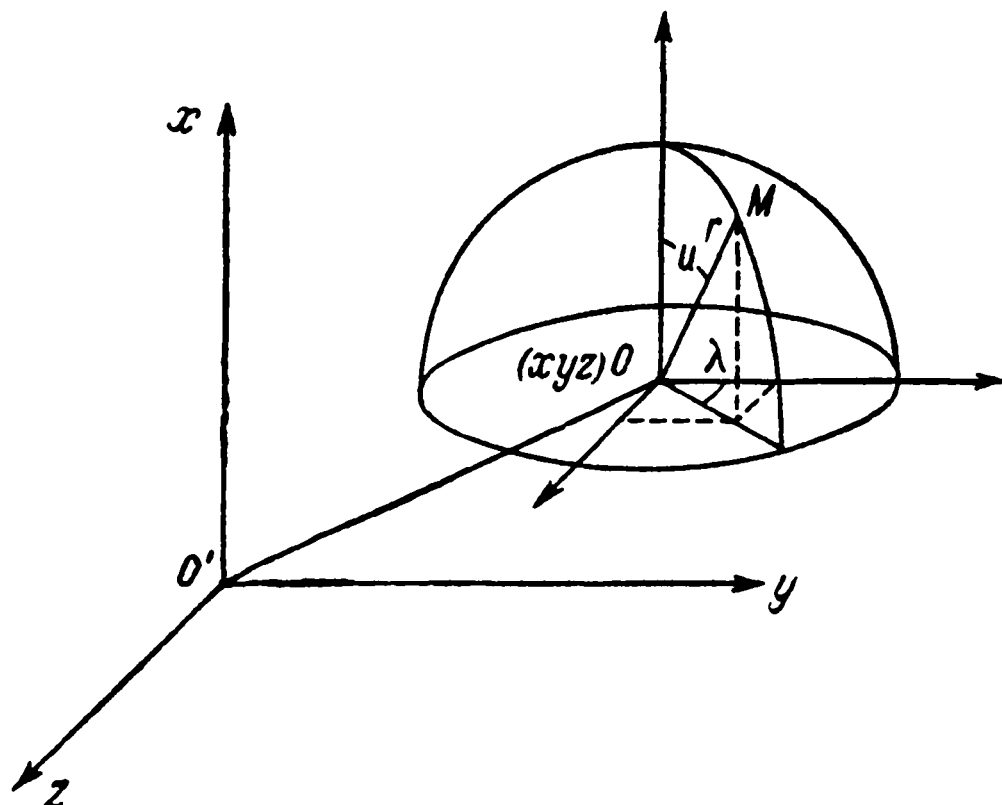
5 (стр. 185). Об истории возникновения понятия потенциальной функции уже упоминалось на стр. 282. Заметим здесь, что Гаусс установил физический смысл понятия „потенциал“, связав работу сил, обладающих потенциалом, с изменением потенциала (потенциальной энергии). Гаусс говорит: „Интеграл $\int p \cos \theta ds$, взятый по любому отрезку линии s , очевидно, будет равен $\epsilon(V' - V^0)$, причем V^0 и V' обозначают значения потенциала в начальной и конечной точках“.

Рассматриваемый Гауссом интеграл $\int p \cos \theta ds$ представляет собой не что иное, как работу силы p , зависящую только от положения начальной и конечной точек. В то время, когда Гаусс писал свой труд, в физике еще не были приняты термины „работа“ и „энергия“.

6 (стр. 186). Уравнение в указанной форме Лаплас получил путем дифференцирования интеграла $V = \iiint \frac{\rho dx dy dz}{r}$ по переменным x, y, z под знаком интеграла и последующим сложением полученных выражений. При этом Лаплас не заметил, что подобная операция не всегда допустима, как это позже показали другие авторы.

7 (стр. 187). Связь между декартовыми координатами a, b, c точки M и ее сферическими координатами поясняется рисунком. Начало декар-

товых осей находится в точке O ; за центр сферы Гауссом выбрана точка O с координатами x, y, z , в которой вычисляется потенциал.



8 (стр. 191). Впервые это уравнение было выведено Пуассоном в 1813 г. (P o i s s o n. *Rémarques sur une équation qui se présente dans la théorie des attractions des sphéroides*. *Nouveau Bulletin de la Société philomatique de Paris*, vol. III, 1813, p. 388—392).

Пуассон дал три существенно различных доказательства своей теоремы (см.: Max B a c h a r a c h. *Abriss der Geschichte der Potentialtheorie*. Würzburg, 1883). При первом способе доказательства (1813) Пуассон представляет точку, для которой желают определить выражение ΔV (лапласиан V), отделенной сферической поверхностью от других масс тела. Тогда потенциал V в данной точке можно рассматривать как сумму $U + U'$, где U — потенциал масс, заключенных внутри этой сферы, U' — потенциал остальных масс. Так как $\Delta U' = 0$, то $\Delta V = \Delta U$. Для точки же, лежащей внутри сферы $\Delta U = -4\pi\rho$, следовательно $\Delta V = -4\pi\rho$, Пуассон замечает при этом, что если тело неоднородно, то радиус сферы нужно выбирать бесконечно малым.

Второе доказательство Пуассоном было дано в 1823 г. (P o i s s o n. *Mémoire sur la théorie du magnétisme en mouvement*. *Mém. de l'Acad. de Paris*, vol. VI, Année 1823. Paris, 1827, pp. 455—463).

При этом доказательстве были использованы формулы, известные под названием интегралов Гаусса.

Третье доказательство Пуассона (1826) основано на применении теории шаровых функций.

Первое строгое доказательство теоремы Пуассона дал Гаусс (§§ 9—11). Гаусс требовал, чтобы „плотность в точке O менялась непрерывно

во все стороны или чтобы точка O лежала внутри сколь угодно малого объема, удовлетворяющего этому условию". Если же это условие не выполняется, например на поверхности тел, то вследствие разрыва здесь вторых производных потенциала доказательство становится невозможным. Гаусс показал на примере шара, что на поверхности раздела вторым производным потенциала можно приписать два значения; замечания Гаусса относительно геометров, которые для поверхности шара получают значения $-2\pi r$, направлено против второго доказательства Пуассона.

Об условиях существования и непрерывности вторых производных потенциала см.: В. А. Стекло в. Основные задачи математической физики, т. II, 1923, стр. 3—11; N. Günther. *Théorie du Potentiel*, 1934, p. 289. Точная формулировка теоремы Пуассона дана Стекловым в 1903 г.: „Если в окрестности точки в какой-либо области, наполненной притягивающими массами, плотность μ непрерывна и если вторые производные потенциала существуют и также непрерывны, то в этой точке $\Delta V = -4\pi f\mu$ ". (W. Stekloff. *Sur certaines égalités générales*. Записки Академии Наук, т. XV, № 7, 1904).

Современное изложение доказательства теоремы Пуассона дано в книге: Л. Н. С р е т е н с к и й. Теория Ньютоновского потенциала. ОГИЗ — Гостехиздат, 1946, стр. 82—85.

9 (стр. 204). В §§ 12—18 Гаусс рассматривает свойства потенциала (и его производных), созданного массами, распределенными по поверхности. Понятие потенциала поверхностных масс возникло в электростатике. Пуассон сформулировал строго математически законы электростатики (1812) и магнитостатики (1821—1826), но только Грин в 1828 г. дал современную трактовку электро- и магнитостатики.

Потенциал поверхностных масс везде конечен и непрерывен, производные же потенциала тоже везде конечны и непрерывны, кроме точек самой поверхности.

В 1812 г. Пуассон доказал, что бесконечно тонкий слой масс, распределенных по поверхности, в бесконечно близких точках, расположенных по обе стороны поверхности, производит такие действия, направленные по нормали к поверхности, сумма которых равна $-4\pi r$.

Гаусс дал тщательное доказательство этой теоремы в §§ 13—18. Он выбрал начало координат на поверхности, ось x направил по нормали к поверхности и показал, что „... X два раза изменяет свое значение скачком, равным $-2\pi k^0$, именно первый раз, когда x , переходя от отрицательного значения к положительному, достигает нуля, и второй раз, когда x переходит через нуль". Исследование же Y и Z обнаружило их непрерывность во всем пространстве.

10 (стр. 211). Гаусс показал в § 20, что значение V в центре сферы при любом распределении масс на поверхности сферы является средним арифметическим из значений V в точках поверхности сферы.

Нейман обобщил эту теорему для случая любой замкнутой поверхности (C. Neumann. Revision einiger allgemeiner Sätze aus der Theorie des Newton'schen Potentials. Math. Ann. III, 1871, S. 424—434, § 2, II u. III; Untersuchungen über das Potential, 1877. S. 24—26, 72 u. 96—101).

Теорему о среднем значении Гаусс использовал, чтобы доказать в § 21, что потенциал в точке, свободной от масс, не может иметь ни максимального, ни минимального значения.

11 (стр. 213). Современная формулировка теоремы, доказанной Гауссом в § 22, была уже приведена на стр. 284. Теорема Гаусса может

быть выведена также и из формулы Грина $\int_T (U \Delta V - V \Delta U) d\tau =$

$$= \int_S \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) d\sigma, \text{ где } U \text{ и } V \text{ — функции, непрерывные вместе с их}$$

первыми производными во всех точках области T и ее границы S . (См.: Н. И. Идельсон. Теория потенциала. ОНТИ, 1936, стр. 100—101.)

12 (стр. 218). Теорема Гаусса $\int q^2 dT = - \int V \frac{\partial V}{\partial p} ds$, где сила $q = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2}$, может быть получена как следствие формулы Грина

$$\int_T \left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} \right) d\tau = \int_S V \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma - \int_T V \Delta U d\tau,$$

если положить $U = V$ и $\Delta V = 0$. Заметим здесь, что из формулы Грина

$$\int_T \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} d\tau = \int_S V \frac{\partial U}{\partial x} \cos(n, X) d\sigma - \int_T V \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} d\tau$$

путем преобразований, предложенных Остроградским (Mémoire sur le calcul des variations des integrales multiples, 1834. Mém. de l'Acad., VI^e série, sc. math. et phys. 1—35) для случая $U = x$, легко выводится известная формула Гаусса — Остроградского о преобразовании объемного интеграла в поверхностный: объемный интеграл расходимости вектор-

ного поля равен потоку поля через поверхность, ограничивающую объем.

13 (стр. 223). Задача, о которой говорит здесь Гаусс, получила название проблемы Гаусса. Нетрудно видеть, что интеграл $\frac{1}{2} \int V m ds$ представляет собой потенциальную энергию масс, распределенных в виде простого слоя по поверхности; таким образом Гаусс ставит перед собой задачу доказать, что условием минимума энергии является такое распределение данных масс по данной поверхности, при котором они образуют эквивалентный уровенный слой. Физически легко представить себе, например, что при равновесии электрические заряды создают на поверхности проводника уровенный слой; но такое представление не является, конечно, строгим решением задачи.

Проводя исследование в более общем виде, ниже, в § 31, Гаусс доказал для распределения масс одного знака существование минимума интеграла $\Omega = \int (V - 2U) m ds$, где U — функция непрерывная и однозначная на поверхности.

Для доказательства существования минимума интеграла Ω , Гаусс рассматривал вариацию Ω , вызываемую вариацией плотности слоя (при неизменной общей массе слоя); он не сомневался в возможности достижения минимума.

В § 33 Гаусс доказал эту же теорему „несколько искусственным путем“ для распределения масс разных знаков, а в § 34 он доказал, что такое распределение масс является единственным.

Однако позже Вейерштрасс выяснил, что доказательство Гаусса о существовании минимума интеграла Ω не имеет всеобщей силы: могут существовать такие распределения масс на данной поверхности, при которых Ω приближается к своему нижнему пределу, но может не существовать ни одного, при котором этот предел фактически достигается.

Лишь впоследствии Нейман и Пуанкаре дали строгие доказательства существования искомых уровенных распределений для различных классов поверхностей.

14 (стр. 234). Позже Томсон искал доказательство теоремы о единственности существования функции, удовлетворяющей определенным требованиям и принимающей на данной поверхности наперед заданные значения. Он нашел, что „если задано значение функции U в каждой точке какой-либо замкнутой поверхности, то уравнение $\Delta U = 0$ дает однозначно значение этой функции U для любой точки внутри этой поверхности“. (W. Thomson. Theorems with reference to the solution of certain partial differential equations. Cambr. and Dubl. Math. Journ., Januar 1848; Liouville Journ. XII, 1847, p. 493—496). Эта теорема стала

известной под названием принципа Дирихле. Фундаментальные исследования по основным вопросам теории потенциала и, в частности, по принципу Дирихле принадлежат А. М. Ляпунову. (А. М. Ляпунов. Работы по теории потенциала. М.—Л., ОНТИ, 1949; или А. М. Ляпунов, Избранные труды. Серия „Классики науки“, АН СССР, 1948). Современное изложение проблемы Дирихле имеется в упоминавшейся раньше книге Л. Н. Сретенского.

СПИСОК РАБОТ ГАУССА ПО ЗЕМНОМУ МАГНЕТИЗМУ

Большинство статей Гаусса по земному магнетизму было впервые напечатано в ежегоднике „Результаты наблюдений Магнитного союза“ (Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins herausgegeben von Gauss und Weber, Göttingen, 1837—1843; далее кратко — „Resultate“).

Полностью все работы Гаусса по математической физике напечатаны в V т. Полного собр. соч. Гаусса (Carl Friedrich Gauss Werke, herausgegeben von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1867; далее кратко — „Werke“).

Ниже мы приводим перечень трудов Гаусса по вопросам теории потенциала, земного магнетизма и электромагнетизма (в хронологическом порядке), с указанием различных изданий их в Германии.

1. Теория притяжения однородных эллипсоидов. — Theorie attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum homogeneorum. Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores, v. II, Gottingae, 1813; Werke, V B., SS. 1—22.

2. Интенсивность земной магнитной силы, приведенная к абсолютной мере. — Intensitas vis magneticae terrestri ad mensuram absolutam revocata. Commentatio auctore C. F. Gauss in concessu Societatis, 1832. Dec. XV recitata (Comment. . . , v. VIII, 1841; Werke, V B., SS. 79—118; Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften No. 53, herausgegeben von E. Dorn. Leipzig, 1894). Отчет автора о содержании этой статьи — Göttinger gelehrte Anzeigen, 1832, Dec. 24; Werke, V B., SS. 293—304.

3. Магнитная обсерватория в Геттингене. — Magnetisches Observatorium in Göttingen. Göttinger gelehrte Anzeigen 1834, August 9, 1835, März 7; Werke, V B., SS. 519—525, 528—536, 540—541.

4. Наблюдения магнитных вариаций в Геттингене и Лейпциге 1 и 2 октября 1834 г. — Beobachtungen der magnetischen Variation in Göttingen

gen und Leipzig am 1 und 2. October 1834. Poggendorf's Annalen, 1834, B. 33; Werke, V B., SS. 525—528.

5. Наблюдения вариаций магнитной стрелки в Копенгагене и Милане 5 и 6 ноября 1834 г. — Beobachtungen der Variationen der Magnetnadel in Copenhagen und Mailand am 5 und 6 November 1834. Astronomische Nachrichten, Nr. 276. 1835, März 21; Werke, V B., SS. 537—540.

6. Введение (к „Результатам“) — Einleitung für die Zeitschrift: Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1836. Herausgegeben von C. F. Gauss und W. Weber; Werke, V B., SS. 345—351.

7. Объяснения к графикам вариаций и данным наблюдений. — Erläuterungen zu den Terminzeichnungen und den Beobachtungszahlen. Resultate, 1836, V; 1837, VIII; Werke, V B., SS. 568—579.

8. Метод, применяемый для наблюдений по срокам. — Das in den Beobachtungsterminen anzuwendende Verfahren. Resultate, 1836, II; Werke, V B., SS. 541—556.

9. Извлечение из трехлетних ежедневных наблюдений магнитного склонения в Геттингене. — Auszug aus dreijährigen täglichen Beobachtungen der magnetischen Declination zu Göttingen. Resultate, 1836, III; Werke, V B., SS. 556—558.

10. Земной магнетизм и магнитометр. — Erdmagnetismus und Magnetometer. Jahrbuch für 1836 herausgegeben von Schumacher, Stuttgart und Tübingen, 1836; Werke, V B., SS. 315—314.

11. Об одном новом приборе, предназначенном для непосредственного наблюдения изменений напряженности горизонтальной части земного магнетизма. — Über ein neues, zunächst zur unmittelbaren Beobachtung der Veränderungen in der Intensität des horizontalen Theils des Erdmagnetismus bestimmtes Instrument. Resultate, 1837, I; Werke, V B., SS. 357—373. О содержании этого мемуара см. отчет автора: „Новое вспомогательное средство для магнитных наблюдений“. — Ein neues Hülfsmittel für die magnetischen Beobachtungen, Vorlesung. Göttinger gelehrte, Anzeigen, 1837, October 30; Werke, V B., SS. 353—356.

12. Руководство к определению продолжительности колебания магнитной стрелки. — Anleitung zur Bestimmung der Schwingungsdauer einer Magnetnadel. Resultate, 1837, IV; Werke, V B., SS. 374—394.

13. Общая теория земного магнетизма. — Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus. Resultate, 1839; Werke, V B., SS. 119—175, Nachtrag, SS. 175—180.

14. Об одном способе облегчения наблюдения отклонений. — Über ein Mittel die Beobachtung von Ablenkungen zu erleichtern. Resultate, 1839, II; Werke, V B., SS. 395—403.

15. К определению постоянных бифилярного магнитометра. — Zur

Bestimmung der Constanten des Bifilarmagnetometers. Resultate, 1840, I; Werke, V B., SS. 404—426.

16. Правила определения магнитного действия, вызываемого магнитом на расстоянии. — Vorschriften zur Bestimmung der magnetischen Wirkung, welche ein Magnetstab in der Ferne ausübt. Resultate, 1840, II; Werke, V B., SS. 427—435.

17. О применении магнитометра для определения абсолютного склонения. — Über die Anwendung des Magnetometers zur Bestimmung der absoluten Declination. Resultate, 1841, I; Werke, V B., SS. 436—443.

18. Общие теоремы относительно сил притяжения и отталкивания, действующих обратно пропорционально квадрату расстояния. — Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs und Abstossungskräfte. Resultate, 1840; Werke, V B., SS. 195—242; Ostwald's Klassiker, № 2, herausgegeben von A. Wangerin. Leipzig, 1889.

19. Наблюдения магнитного inclination в Геттингене. — Beobachtungen der magnetischen Inclination in Göttingen. Resultate, 1841, II; Werke, V B., SS. 444—492.

20. К математической теории электродинамических действий. — Zur mathematischen Theorie der electrodynamischen Wirkungen. Опубликовано посмертно в: Werke, V B., SS. 601—630.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Адаме 310, 312
Ампер 84, 182
Амуидсен 315
Афанасьева В. И. 289, 311, 312
- Барлоу 79, 112, 311
Бартельс 257
Бахарах 329
Бауер 306, 311, 319
Бельчер 144, 321
Бенькова Н. П. 290
Берар 321
Бестужев 259
Био 241, 243, 246, 247, 256, 270,
280, 282, 283
Блекэт 292
Блоссевиль 245
Бобынин В. В. 257
Бонне 309
Борда 245
Боудич 246
Брунс 266
Булгаков Н. А. 310
- Вайерштрасс 332
Валер 321
Вальтерсгаузен Сарториус фон 120,
257, 261, 264, 321
Вангери 326
- Вебер 30, 176, 265, 267, 268, 271,
272, 274, 275, 277, 283, 304, 311,
313, 314, 319, 320, 326, 327
Вейнберг К. Б. 315
Вестайн 311, 312
Вильд Г. 278
Виннеке 257, 262
- Галлей 79, 239, 279
Гамбей 272
Гамель 275
Гамильтон 285
Гельмгольц 288
Гензельманн 257
Гепперт 266
Герлинг 267, 269, 270
Гильберт 279
Гольдшмидт 116, 121, 145, 283, 319,
321
Грин 285, 330, 331
Гумбольдт А., фон 9, 25, 75, 118—
120, 245, 266, 272, 283
Гюнтер Н. М. 293, 330
Гэ-Люссак 245
- Дайсон 311, 312
Даламбер 258
Джонсон 120
Дирихле 286, 293, 309, 333
Дори 294

- Дюперо 241, 245
- Зингер 316
- Идельсон Н. И. 284, 331
- Кавендиш 328
- Каган В. Ф. 260
- Калинин Ю. Д. 290
- Кальдекот 321
- Квинтус Ицилиус 310, 312
- Кениг 328
- Кестнер 258
- Кетле 144
- Кинг 120, 121
- Клеро 258, 284
- Ковальский Я. И. 275
- Коллер 321
- Коллонг де 238
- Кольрауш 269, 278, 304
- Конов 321
- Крафт 241, 280
- Крейль 120
- Крылов А. Н. 237—239, 260
- Кудрявцев П. Н. 284
- Кулон 12, 28, 248, 269, 271, 279, 328
- Купфер А. Я. 118, 239, 259, 266
- Кюри 313
- Лагранж 258, 284
- Ламон 270, 288, 302, 304
- Лаплас 239, 258, 284, 309, 328
- Лебедев П. Н. 291, 292
- Лежандр 308
- Лейст 289
- Листинг 120, 321
- Лобачевский Н. И. 257, 260
- Ломоносов М. В. 279
- Лоттен 120
- Ляпунов А. М. 292, 293 333
- Майер Тобиас 12, 28, 75, 82, 240, 279, 283
- Максвелл 304, 319, 328
- Неймайер 310, 312
- Неймаи К. 331, 332
- Ньютон 239, 258, 308
- Ольберс 239, 263, 267—269, 273—275
- Остроградский М. В. 331
- Перри 120, 245
- Петерсен 310, 312
- Пианци 260
- Пильчиков Н. Д. 306
- Пуанкаре 292, 332
- Пуассон 14, 29, 177, 245, 284, 309, 327, 329, 330
- Пушкин А. С. 259
- Рейнке 118
- Риттмюллер 144
- Розе Н. В. 295
- Росс 94, 120, 130, 144, 315
- Рудберг 144
- Савельев А. А. 257
- Сименс 304
- Симонов И. М. 241—257, 259, 274, 282, 285, 305
- Случановский А. 301
- Смирнов В. И. 310
- Смирнов И. Н. 306
- Сретенский Л. Н. 293, 330, 333
- Стеклов В. А. 292, 330
- Струве 118
- Сузерланд 291
- Сэбайн 112, 113, 117, 120, 144, 245, 311, 321, 326
- Теллье 313
- Тиндалл 305
- Томсон 304, 332
- Трубяченский Н. Н. 295
- Тэйлор 120, 305

- Уилкс 321
Умов Н. А. 289, 290
- Фарадей 266, 272
Федоров 118, 119
Филлипс 120
Фиц-Рой 120, 121
Фокс 120
Форба 120
Фрейсинэ 121
Френсис 305
Фритше 310, 312
Фурнер 311, 312
Фурье 310
Фусс Н. И. 118—120, 260
- Ханстин 9, 12, 25, 28, 79, 82, 117—
119, 241, 245, 269, 280, 283, 321,
326
Хорнер 112, 311
- Циммерман 259
- Шаль 328
Шварц 292
Шевалье 313
Шерниг 266
Шефер 266
Шиллинг 267
Шиллинг П. А. 275
Шмидт А. 301, 306, 307, 310—312,
318, 319
Шуберт Ф. И. 260
Шумахер 259, 264, 267, 275, 294
Шустер 290
- Эйлер 240, 258, 259, 261, 279, 284
Энке 120, 263, 267, 269, 270
Эрман 118—121, 245, 310, 312
Эрстед 266, 280
Эскур 144
- Якоби 275, 304
Яниш 259
Яновский Б. М. 295, 303



СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Интенсивность земной магнитной силы, приведенная к абсолютной мере. (Отчет, напечатанный в Геттингенских ученых ведомостях 24 декабря 1832 г.)	7
Интенсивность земной магнитной силы, приведенная к абсолютной мере	23
Общая теория земного магнетизма	77
Вспомогательные таблицы для вычисления направления и величины магнитных сил на поверхности земли по элементам теории	147
Карты из „Атласа земного магнетизма“	161
Карты значений $\frac{V}{R}$	163—164
Карта идеального распределения плотности магнетизма на земной поверхности	165
Карты вычисленных значений склонения	166—167
Карты вычисленных значений полной напряженности	168—169
Карта вычисленных значений горизонтальной напряженности	170
Карта вычисленных значений вертикальной напряженности	171
Общие теоремы относительно сил притяжения и отталкивания, действующих обратно пропорционально квадрату расстояния. (Отчет, напечатанный в „Геттингенских ученых ведомостях“ 26 марта 1840 г.)	173
Общие теоремы относительно сил притяжения и отталкивания, действующих обратно пропорционально квадрату расстояния	179

Приложения

Послесловие. Т. Н. Розе	237
И. М. Симонов. О земном магнетизме	245

	Стр.
Гаусс и его работы по земному магнетизму. <i>Т. Н. Розе</i>	257
I. Краткая биография	257
II. Работы Гаусса по земному магнетизму	266
III. Работы Гаусса по теории земного магнетизма	279
IV. Значение работ Гаусса по земному магнетизму	286
Комментарии. <i>Т. Н. Розе</i>	294
К отчету и работе „Интенсивность земной магнитной силы, приведенная к абсолютной мере“	294
К работе „Общая теория земного магнетизма“ ¹	305
К отчету и работе „Общие теоремы относительно сил при- тяжения и отталкивания, действующих обратно пропор- ционально квадрату расстояния“	326
Список работ Гаусса по земному магнетизму	334
Именной указатель	337

¹ Примечания №№ 11, 12, 19 и 20 написаны Б. М. Яновским.

*Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Академии Наук СССР*

*

Редактор Издательства *Л. С. Сазонов*
Технический редактор *Р. С. Певзнер*
Корректор *Н. П. Ракова*

*

РИСО АН СССР № 6804. Подписано
к печати 19/III 1952 г. М-15886. Бумага
 $70 \times 92/_{16}$. Бум. л. $10\frac{3}{4}$. Печ. л. 25.15
Уч.-изд. л. $16.74 + 1$ вклейка (0,08 уч. л.)
Тираж 3000. Зак № 247. Номинал по
прейскуранту 1952 г. 13 р. 75 к.

1-я типография Издательства Академии
Наук СССР, Ленинград, В. О.,
9-я линия, 12.

**1-я ТИПОГРАФИЯ
ИЗДАТЕЛЬСТВА АКАДЕМИИ НАУК СССР
Ленинград, 34. В. О., 9 линия, 12**

КОНТРОЛЕР № 3

**При обнаружении недостатков в книге
просим возвратить книгу вместе с этим
ярлыком для обмена**

ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
50	1 снизу	4228 792 400	4 228 732 400
50	9 „	—0.8980	—0.08980
65	Таблица, 1-я графа	1.4 м	1.1 м
73	12 снизу	W	W'
74	6 „	0.010099554	0.01009554
99	11 „	$-[1 + (2-3 \cos^2 u)] \epsilon$	$-[1 + (2-3 \cos^2 u) \epsilon]$
104	8 сверху	$+ \dots t$	$+ \dots +$
110	9 „	$2g^{1,0}p^{1,0} + 3g^{2,0}p^{2,0} + 4g^{3,0}p^{3,0}$	$2g^{1,0}P^{1,0} + 3g^{2,0}P^{2,0} + 4g^{3,0}P^{3,0}$
165	Две изоли- нии в верх- ней части карты	—108.2	—198.2
203	1 снизу	$\int \frac{2\rho A h d\rho}{r^3}$	$\int \frac{2\rho^3 A h d\rho}{r^3}$
232	3 „	$\cos \theta$	θ
232	3 „	т. е. отличается	т.е. $\cos \theta$ отличается
325	1 „	Приложение	Продолжение